

基于凸优化的自动泊车轨迹规划方法

任宏斌^{1,2}, 张志远¹, 周高立¹, 金家昊¹, 杨林^{1*}

(1. 北京理工大学 机械与车辆学院, 北京 100081; 2. 北京理工大学 郑州研究院, 河南 郑州 450007)

摘要: 针对泊车常见的平行、垂向及斜向停车场中 Hybrid A*算法得到的泊车路径不严格符合车辆运动学约束的问题, 提出了通用的最优泊车轨迹规划方法。该方法基于数值求解, 通过拉格朗日对偶将车位约束转化为凸优化问题, 进而在满足车辆运动学约束的条件下找到全局最优的泊车路径。对于非线性规划数值求解效率低的弊端, 采用热启动的方法, 首先利用 FTHA 完备 Hybrid A*算法确定路径位置初值, 依据轨迹曲率计算得到参考速度的初始值, 由约束条件计算得到凸优化问题的对偶变量初值, 然后将这些值代入转换后的非线性方程求得原问题的最优解。在3种典型泊车场景中, 通过仿真验证了所提出方法的通用性和结果的最优性。

关键词: 自动泊车; 轨迹规划; 凸优化; 热启动

中图分类号: TP242

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.07.0015

引用格式: 任宏斌, 张志远, 周高立, 等. 基于凸优化的自动泊车轨迹规划方法[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2026, 47(2): 226-233.

REN Hongbin, ZHANG Zhiyuan, ZHOU Gaoli, et al. Automatic parking trajectory planning method based on convex optimization[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2026, 47(2): 226-233.

Automatic Parking Trajectory Planning Method Based on Convex Optimization

REN Hongbin^{1,2}, ZHANG Zhiyuan¹, ZHOU Gaoli¹, JIN Jiahao¹, YANG Lin^{1*}

(1. School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Zhengzhou Research Institute, Beijing Institute of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: A general parking path planning method was proposed to address the limitation that traditional Hybrid A* often failed to strictly satisfy vehicle kinematic constraints in parallel, vertical, and oblique parking scenarios. The parking space constraint was formulated as a convex optimization problem via the Lagrange dual function, enabling the computation of a globally optimal path under kinematic feasibility. To overcome the low efficiency of nonlinear programming, a warm-start strategy was adopted: the initial path was generated using Fault-Tolerant Hybrid A*, the reference velocity was derived from trajectory curvature, and the dual variables were initialized from the constraints. The final solution was obtained by solving the transformed nonlinear equations. Simulation studies on three parking scenarios verify the versatility and optimality of the proposed method.

Key words: autonomous parking; path planning; convex optimization; warm start

收稿日期: 2025-07-29

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(52002025); 河南省重大产业关键技术攻关“揭榜挂帅”项目(251000240100)

作者简介: 任宏斌(1987—), 男, 副教授, 博士, 主要从事无人车辆与智能无人系统的研究。

***通信作者:** 杨林(1972—), 男, 讲师, 博士, 主要从事线控底盘总体设计的研究。E-mail: yanglin@bit.edu.cn。

0 引言

自动泊车是无人驾驶系统算法的重要组成部分,也是代客泊车完成停入车位的最后关键步骤,无论其位于街道边还是指定的停车场,都需要在有限的空间内完成平行、垂向或斜向的停车任务,该任务不仅需要保证安全高效,而且在复杂环境中也需要具有强鲁棒性。不同于结构化道路的轨迹规划,自动泊车并没有参考路径,需要自主在相对狭窄的自由空间内规划出一条平滑易跟踪的轨迹,从而使目标车辆在一定时间内到达精准的目标停车位置。

传统的泊车算法多基于几何线段拼接,从圆弧直线^[1-2]到过渡回旋线^[3],再到贝塞尔曲线^[4]、反正切曲线拟合^[5]、五次多项式^[6]以及样条曲线^[7]等,通过不断细化泊车过程,平滑各个线段及其拼接部分^[8]来完善规划路径,这对于特定场景具有计算高效性,但同样也意味着缺乏鲁棒性,需要对不同泊车环境进行不同的轨迹建模。

适合多场景自动泊车的轨迹规划方法包括:1) 采样搜索法,比如快速随机树^[9]、双向搜索 RRT*^[10],以及在此基础上更符合行车控制域的限定扩展空间撒点搜索^[11]等,对于随机点的平滑处理,可用局部加权回归平滑算法(Lowess)^[12],或者三次贝塞尔曲线、三次样条数据插值等进一步处理,最为典型的算法仍然是 Hybrid A*^[13],因为在其 48 种可能性中直接考虑了关键的倒车路径。2) 基于数值优化的方法,其将优化控制问题离散为非线性规划问题,确定性能函数后,添加车辆运动学、道路障碍物等约束条件,利用内点法^[14]、伪谱法^[15]等求解。但是,优化问题通常是非凸且不可微的,为避免陷入局部最优,还需要别的算法,比如 Zhang 等提出的 OBCA^[16]便是针对避免碰撞的轨迹优化问题先进行凸化转化。事实上数值求解大都面临计算效率较低的问题,引入热启动方法则可提供较好的初值条件来加快这一过程,比如 A*, Hybrid A*, 以及其他启发式算法。He 等^[17]在此基础上,将热启动的 Hybrid A* 先进行纵向距离优化,固定时间间隔,在减少变时间步长的求解过程的同时提高了求解成功率。Li 等^[18]则在非结构化场景中,提出添加走廊结构(只考虑路径邻近的障碍物)来减少全局障碍物计算量的方法,同样加快了求解过程并提高了成功率。3) 基于深度强化学习的轨迹规划^[19-24],其通过确定的泊车路线(上述方法求得或者实际泊车路径)作为数据集进行学习,

最后输出期望路点或者控制序列。

综上所述,在探知泊车环境的前提下,数值优化方法依然是更好的找到最优泊车路径的方法,或是提供最优参考路径的方法。对于非线性规划数值求解效率低的弊端,可以从初值,筛选必要的障碍物,设定适当松弛的性能函数,非线性求解器等方面改进。本文的主要贡献点是在完备 Hybrid A* 算法的基础上,根据轨迹找到速度参考初值,对于原问题的对偶变量则是由障碍物碰撞约束计算得到合理初值来确保原问题的求解。

1 问题描述

1.1 车辆运动学模型

符合阿克曼转向原理的四轮车辆可以简化为自行车模型,其相关参数如图 1 所示,后轴中心到后悬的距离为 L_r , 前轴中心到前悬的距离为 L_f , 轴距为 L , 车长即为三者之和, 车宽为 W , 等效前轮转角为 φ , 航向角为 θ 。状态向量 $x(k) = [x_x(k), x_y(k), v(k), \varphi(k)]^T$, 其中, $x_x(k)$ 和 $x_y(k)$ 为位置, m; $v(k)$ 为速度, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\varphi(k)$ 为航向角, rad; 控制向量 $u = [a, \delta]^T$, 其中, a 为加速度, $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; δ 为前轮转角, rad。该模型可写成

$$\dot{x}(k) = f(x(k), u(k)). \quad (1)$$

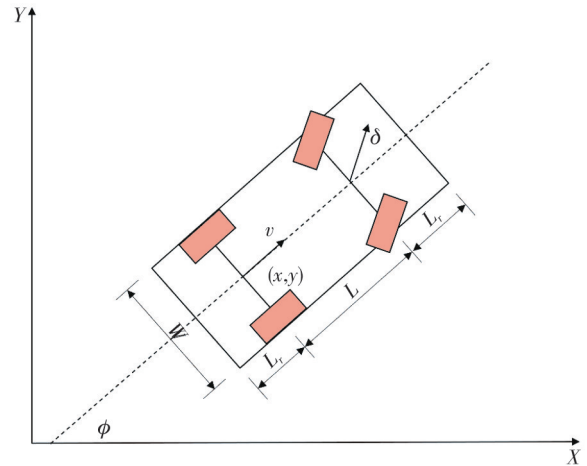


图 1 车辆运动学模型

Fig. 1 Vehicle kinematics model

固定时间步长离散化具体表示为

$$x_x(k+1) = x_x(k) + v(k) \cos(\varphi(k)) dt,$$

$$x_y(k+1) = x_y(k) + v(k) \sin(\varphi(k)) dt,$$

$$v(k+1) = v(k) + a(k) dt,$$

$$\Phi(k+1) = \Phi(k) + v(k) \frac{\tan(\delta(k))}{L} dt. \quad (2)$$

当把固定的时间步长 dt 改为变时间步长 $\tau(k)$, 并由二阶 Runge-Kutta 法对车辆运动学模型进一步近似, 则更符合实际, 因为过于精细的步长会增加计算成本, 而较长的步长可能会错过最优解。同时应满足实际的车辆加速度、速度、横摆角速度以及车轮转角的物理约束, $h(x(k), u(k)) \leq 0$, 具体为

$$\begin{bmatrix} a_{\min} \\ v_{\min} \\ \omega_{\min} \\ \delta_{\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a(t) \\ v(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_{\max} \\ v_{\max} \\ \omega_{\max} \\ \delta_{\max} \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.2 障碍物约束

障碍物表现为已被占据车辆的停车位, 更严格的则认为是目标位置以外的所有停车位, 以及道路边界。另一方面, 实际停车过程中单车泊车占据先行权时, 附近车辆与行人大都会避让一定空间, 所以某种程度上可以不考虑动态障碍物。静态障碍物表示为 $O^{(m)} = \{y | A^{(m)}y \leq b^{(m)}\}$, 对应第 m 个障碍物, 表示为由平面分割组成的凸包, $A^{(m)}$, $b^{(m)}$ 分别代表该障碍物边界的法线向量及偏置常向量, 对于非凸障碍物则拆解成多个凸包的组合, 或者经由障碍物膨胀后忽略掉非凸部分。设车辆占据空间为 $E(k)$, 则避免碰撞的条件为两者交集为空, 即

$$E(k) \cap O^{(m)} = \Phi. \quad (4)$$

若将车辆形状简化为椭圆或多圆的并集则过于保守, 对于狭窄的停车位而言将车辆设为矩形仍是最精确的简化模型, 记为

$$E(k) = \{x | G(k)x \leq g(k)\}, \quad (5)$$

式中: $G(k)$, $g(k)$ 为 k 时刻的自车超平面条件, 分别代表法线向量及偏置常向量。为方便计算该条件可以把车辆模型转换为矩形的旋转和平移, 该非静态过程重写为

$$E(k) = R(k)\mathcal{B} + t(k), \quad \mathcal{B} = \{x | Gx \leq g\}, \quad (6)$$

式中: $R(k)$ 为 k 时刻的旋转矩阵; $t(k)$ 为平移矩阵; $\mathcal{B}$ 定义为在坐标原点处的矩形, 与时间 k 无关。

定义车辆与障碍物的距离, 以及最小安全距离 $d_{\min} > 0$, 具体为

$$\min_{x,y} \|R(k)x + t - y\|_2 > d_{\min}. \quad (7)$$

1.3 优化目标

结合式(7)可以定义避免碰撞的优化控制问题, 具体为

$$\begin{aligned} \min_{x,u} \sum_{k=0}^N l(x(k), u(k)), \\ \text{s. t. } x(0) = x_0, \\ x(N+1) = x_F, \\ x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ h(x(k), u(k)) \leq 0, E(k) \cap O^{(m)} = \Phi, \\ k = 0, 1, \dots, N, m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (8)$$

上述问题满足 Slater 条件, 强对偶要求, 其对偶问题的最优解即是原问题的最优解^[25], 因此, 式(8)中障碍物约束部分也即式(7)可以转写为

$$-g^T \mu^{(m)}(k) + (A^{(m)}t(k) - b^{(m)})^T \lambda^{(m)}(k) > d_{\min},$$

$$G^T \mu^{(m)}(k) + R(k)^T A^{(m)} \lambda^{(m)}(k) = 0,$$

$$\|A^{(m)} \lambda^{(m)}(k)\|_2 \leq 1, \lambda^{(m)}(k) \geq 0,$$

$$k = 0, 1, \dots, N,$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

式中: 对偶变量 λ, μ 以及需要的求解目标 x, u 都为该问题的优化对象, 然而 NLP 问题会受到约束以及初始条件的影响, 导致求解效率低下甚至无解, 所以需要进行改进。

2 热启动与优化问题

2.1 路径热启动

热启动可以由 Hybrid A* 计算得到初始条件, 然而该算法不够完备, 主要表现为 Hybrid A* 算法中无论是通过扩展节点得到的曲线还是 RS 曲线都可能因为直线圆弧的限制而无法合理避让障碍物, 从而失去热启动的优势。

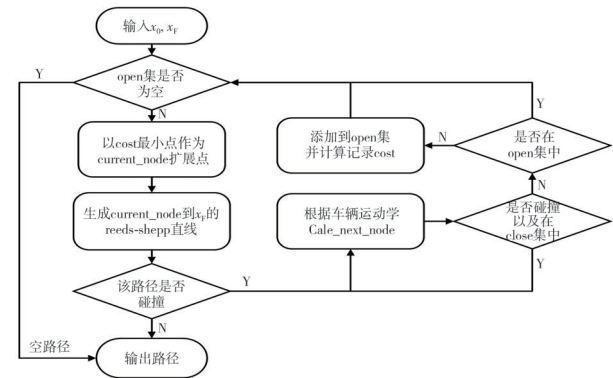


图 2 Hybrid A* 算法流程图

Fig. 2 Algorithm flowchart of Hybrid A*

改进流程如图 2 所示, 可以看出, 即使 open 集为空, 未能找到最终路径, 但依然能从 close 集里选取出目前为止 cost 最小的节点, 然后可以以该节点继续利用 A* 算法搜索使整个路径更加完备, 即使后一段路径并不符合运动条件, 但比起 0 初始值, 也可以提供更好的初值。因此, Hybrid A* 由 FTHA (Fault-

Tolerant Hybrid A*)进行完备。

2.2 速度热启动

速度的初始条件可由拟合曲线的曲率确定,具体可通过相邻的3个路点共圆的半径倒数得到,曲率越大速度越低,曲率低于阈值时速度便可达设定的最高车速,中间则为线性过渡,算法如表1所示。速度的方向可由2.1节生成的曲线是否具有倒车特征直接确定。有必要说明的是,这里的速度只提供初值,最终的速度对加速度的约束由最后求解中同合适的变时间步长变量共同优化求解得到。

表1 速度规划热启动算法

Tab.1 Warm-start algorithm for speed planning

1.	CalcCur(<i>pt1</i> , <i>pt2</i> , <i>pt3</i>)
2.	$k_1 = (pt2.y - pt1.y) / (pt2.x - pt1.x)$
3.	$k_2 = (pt2.y - pt1.y) / (pt2.x - pt1.x)$
4.	$center.x = (k_1 k_2 (pt1.y - pt3.y) + k_1 (pt1.x + pt2.x) - k_2 (pt2.x + pt3.x)) / (2(k_2 - k_1))$
5.	$center.y = -(center.x - (pt1.x + pt2.x) / 2) k_1 + (pt1.y + pt2.y) / 2$
6.	return $k = 1 / norm(center, pt1)$
7.	Velocity(maxspeed, factor, <i>k</i>)
8.	if $k \leq k_{min}$
9.	$v = maxspeed$
10.	elseif $k \geq k_{max}$
11.	$v = 1 * factor$
12.	else
13.	$k = k - k_{min}$
14.	$v = (maxspeed - 1)k + 1$
15.	$v = v * factor$
16.	end
17.	return <i>v</i>

2.3 对偶变量热启动

式(9)中的对偶变量 λ , μ 并不是最终需要的变量,但也可以为优化求解提供热启动的良好过渡,从而使整个过程快速收敛到最优值。因为该变量是由拉格朗日对偶函数得到的,其主要与障碍物碰撞有关,所以可由对应约束条件求解该问题。将目标函数设定为在 k 时刻对第 m 个障碍物(其他停车位)的距离在泊车过程中求最大,等价于 $d^{(m)}(k)$ 求和求最小,从而表示对每个障碍物的距离适中,更靠近车位中心,具体为

$$\min_{\mu, \lambda} \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^M d^{(m)}(k),$$

s. t.

$$-g^T \mu^{(m)}(k) + (A^{(m)} t(k) - b^{(m)})^T \lambda^{(m)}(k) + d^{(m)}(k) = 0,$$

$$G^T \mu^{(m)}(k) + R(k)^T A^{(m)^T} \lambda^{(m)}(k) = 0,$$

$$\|A^{(m)^T} \lambda^{(m)}(k)\|_2 \leq 1, \lambda^{(m)}(k) \geq 0,$$

$$k = 0, 1, \dots, N,$$

$$m = 1, 2, \dots, M_o \quad (10)$$

2.4 泊车最终优化问题重描述与求解

在给定初始状态 x_0 及其目标状态 x_F 时,自动泊车问题可以描述为从初始状态到目标状态的优化问题,在优化过程中如何在保证不与障碍物发生碰撞的前提下最小化控制输入(能量),控制输入的变化量(舒适度)和泊车时间。因此,泊车优化问题最终可描述为

$$\min_{\tau, x, u, \lambda, \mu} \sum_{k=0}^N u^T(k) Q_u u(k) + \Delta u^T(k) Q_{\Delta u} \Delta u(k) + Q_\tau \tau,$$

$$\text{s.t. } x(0) = x_0, x(N+1) = x_F, \quad (11)$$

$$x(k+1) = x(k) + \tau(k) f(x(k) +$$

$$0.5\tau(k) f(x(k), u(k)), u(k)), \quad (12)$$

$$h(x(k), u(k), \tau(k)) \leq 0, \quad (13)$$

$$-g^T \mu^{(m)}(k) + (A^{(m)} t(k) - b^{(m)})^T \lambda^{(m)}(k) > d_{min},$$

$$G^T \mu^{(m)}(k) + R(k)^T A^{(m)^T} \lambda^{(m)}(k) = 0,$$

$$\|A^{(m)^T} \lambda^{(m)}(k)\|_2 \leq 1, \lambda^{(m)}(k) \geq 0,$$

$$k = 0, 1, \dots, N, m = 1, 2, \dots, M, \quad (14)$$

式中: Q_u , $Q_{\Delta u}$, Q_τ 为对应的权重矩阵; τ 为变步长求解系数; x_0 为初始状态量; x_F 为泊车终点状态量; d_{min} 为安全裕度,这里为大于0的实数。

选取目标函数来最小化控制量及其控制增量的成本和泊车时间,为了提高求解效率和求解最优性,采用变采样步长进行优化求解。式(11)为初始位姿约束和终端位姿约束,式(12)为车辆运动学约束,式(13)为被优化量上下界约束,式(14)为无碰撞描述的拉格朗日对偶约束。

本文采用Matlab的非线性规划求解器fmincon函数进行求解,并采用内点法求解算法。通过引入障碍函数的方法将约束优化问题转换成无约束问题,再利用优化迭代过程不断地更新效用函数,以使算法收敛。内点法的基本思想是在可行域的边界筑起一道很高的障碍,当迭代点靠近边界时,目标函数陡然增大,以示惩罚,阻止迭代点穿越边界,从而将最优解约束在可行域之内。为了提高收敛速度,提高求解效率,将前述热启动作为非线性规划求解器的初始值。

3 仿真实验验证

本文通过3种典型的泊车场景,即侧方停车、

垂直倒车、60°斜置停车位,对所设计的算法进行验证。仿真参数设置如表2所示。

表2 车辆参数

Tab. 2 Vehicle parameters

车辆后轴 中心至前端 距离/m	车辆后轴 中心至左右端 距离/m	车辆后轴 中心至后端 距离/m	前轮 最大转角/rad	泊车过程 最大前进车速/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	泊车过程 最大后退车速/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	泊车过程 最大加速度/ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)	库位 长度/m	库位 宽度/m
3.7	1	1	0.6	0.5	0.5	0.3	5	2.6

3.1 侧方停车

图3为侧方停车Hybrid A*泊车路径,浅彩色虚线为从当前行车节点计算到终点的无碰撞RS曲线,当该曲线上代表车辆的矩形与障碍物(车位边界)会发生重叠时,碰撞位置显示为红色,也就意味着路径不可行,需进行下一步迭代,当根据车辆运动学运动到下一个节点时,重复进行障碍物检测,直至生成无碰撞路径,即为图中绿色的曲线。

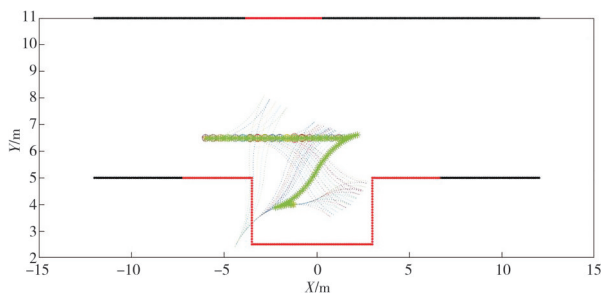


图3 侧方停车Hybrid A*路径

Fig. 3 Hybrid A* path result for parallel parking

图4为通过全局优化方法计算得到的路径,该路径在安全距离内更贴近障碍物(停车位),所以所需的泊车空间也会更小。由两种路线对比可以得知,当车从前进转为倒退时,全局优化曲率变化更小,整体路径更平滑。

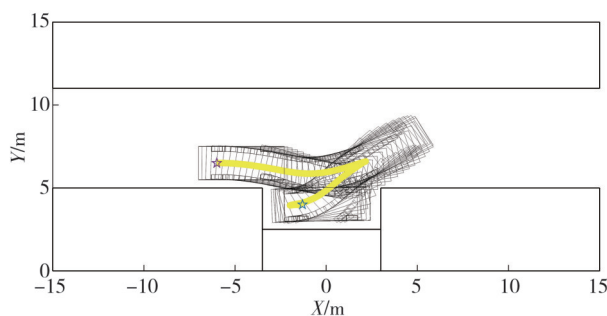
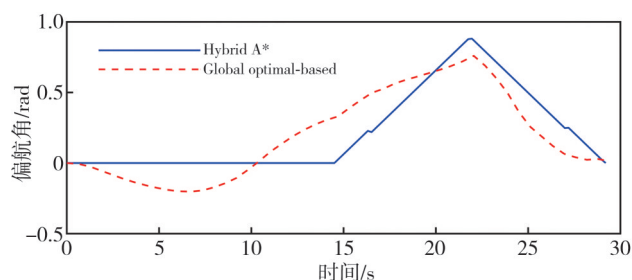


图4 侧方停车全局优化路径

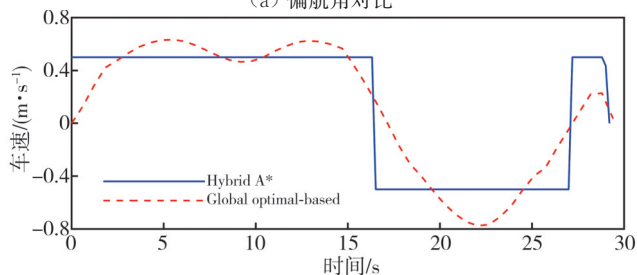
Fig. 4 Global optimal path for parallel parking

在图5(a)航向角对比图中,Hybrid A*路线在转向时其航向角的突变意味着此点在泊车过程原地转向,会产生轮胎磨损,在图5(b)速度对比图中,转向时需要车辆的急停急启,不仅降低了

行车舒适性,且不易跟踪控制。全局优化路线则更加平滑,因为时间步长也作为性能函数优化目标,其速度变化也更加平缓,是更符合车辆运动学约束的泊车路径。图6为侧方停车全局优化变步长系数,可以看出在优化过程中,适当调整步长能够更好地兼顾求寻优效率。



(a) 偏航角对比



(b) 速度对比

图5 侧方停车航向角与车速对比

Fig. 5 Comparison of heading angle and vehicle speed for parallel parking

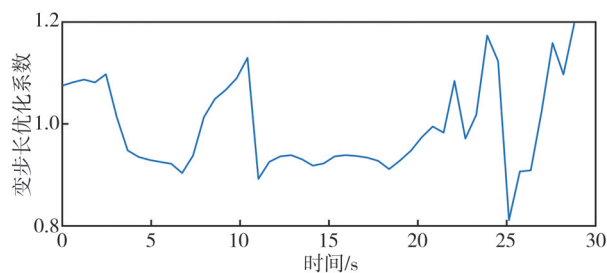


图6 侧方停车全局优化变步长系数

Fig. 6 Variable step-size coefficient result

3.2 垂直倒车

图7为垂直倒车Hybrid A*路线,由前几步可知,在搜索过程中,不同起点的RS曲线也不同,最终得到的无碰撞泊车路线为蓝色曲线。

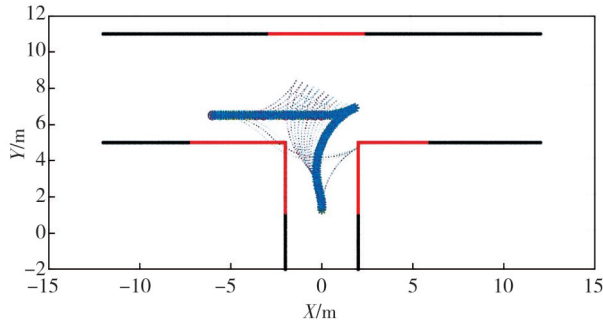


图 7 垂直倒车 Hybrid A* 路径
Fig. 7 Hybrid A* path result for vertical parking

图 8 为通过全局优化得到的路径, 同样在安全距离内偏向停车位, 所需泊车空间更小, 且能完成泊车任务。两路线对比, 全局优化得到的泊车路线也更加平缓, 所需泊车空间也 smaller。

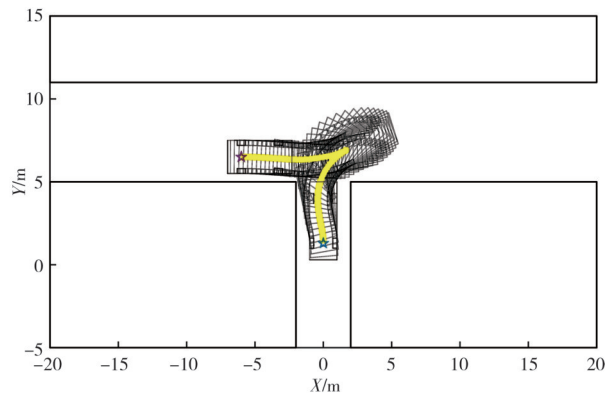
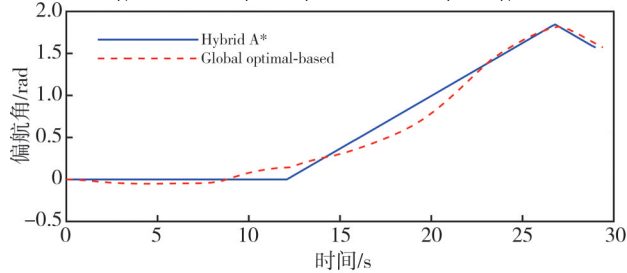
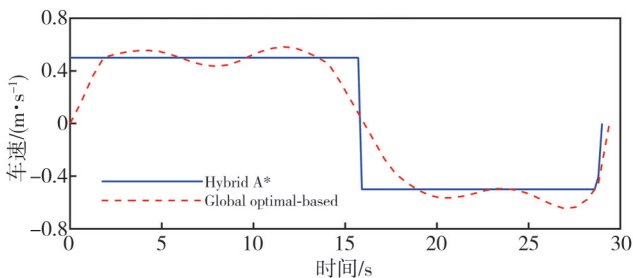


图 8 垂直倒车全局优化路径
Fig. 8 Global optimal path for vertical parking



(a) 偏航角对比



(b) 速度对比

图 9 垂直停车航向角与车速对比
Fig. 9 Comparison of heading angle and vehicle speed for vertical parking

不同于侧方停车, 垂直停车只有一次主要转向, 然后为目标位置附近调整转向, 在图 9(a) 中, Hybrid A* 同样存在转向角突变, 在图 9(b) 中存在急停急启及原地转向过程, 但经过全局优化后, 泊车过程更加平滑。图 10 为垂直停车全局优化变步长系数, 可以看出, 在优化过程中适当调整步长能够更好地兼顾求优效率。

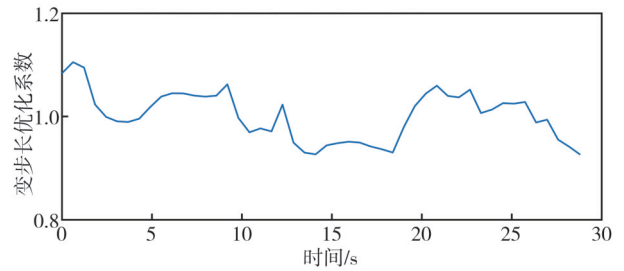


图 10 垂直停车全局优化变步长系数
Fig. 10 Variable step-size coefficient of global optimization for vertical parking

3.3 60°斜置停车

图 11 为斜置停车 Hybrid A* 路线, 此时车头顺着斜向方向向左, 最终得到的无碰撞停车路线为如图所示的蓝色曲线。图 12 为斜置停车全局优化路线, 这两条路线比前两种泊车任务更加近似, 因为斜置的泊车路径角度变化相对较小。具体分析可看出, 全局优化倒车点比 Hybrid A* 稍高, 且能以稍小的转弯半径完成泊车, 虽然总体而言针对该环境的路径区别不大, 但在速度平滑方面仍有较大差别。

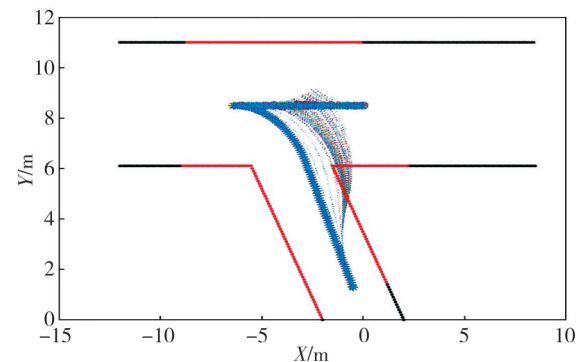


图 11 斜置停车 Hybrid A* 路径
Fig. 11 Hybrid A* path result for oblique parking

斜置停车也只有一次主要转向, 然后为目标位置调整转向, 在图 13(a) 中, Hybrid A* 同样存在转向角突变, 在图 13(b) 中存在急停急启及原地转向过程, 但经过全局优化后, 路径航向角及速度曲线变化更平缓, 泊车过程更加平滑。图 14 为斜置停车

全局优化变步长系数,可以看出,在优化过程中,适当调整步长能够更好地兼顾求寻优效率。

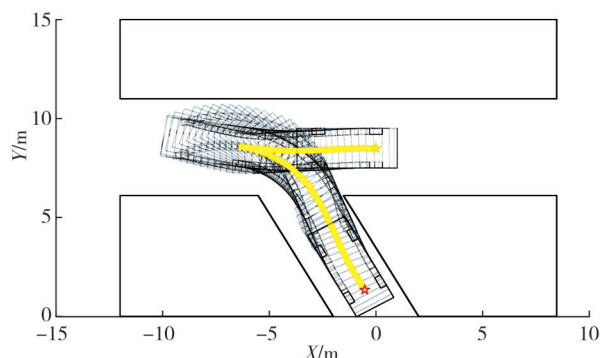
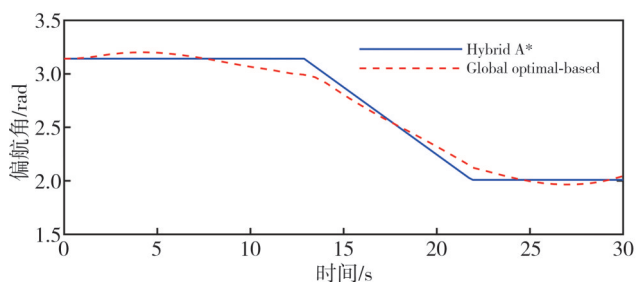
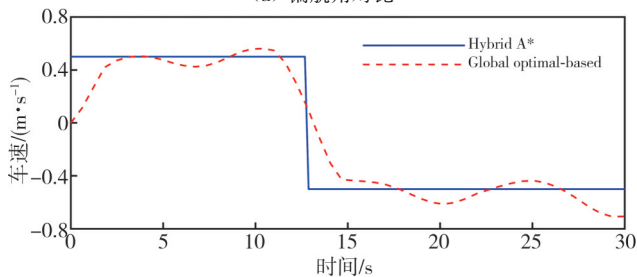


图 12 斜置停车全局优化路径

Fig. 12 Global optimal path for oblique parking



(a) 偏航角对比



(b) 速度对比

图 13 斜置停车航向角与车速对比

Fig. 13 Comparison of heading angle and vehicle speed for oblique parking

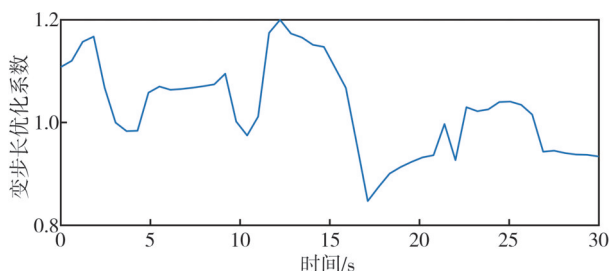


图 14 斜置停车全局优化变步长系数

Fig. 14 Variable step-size coefficient of global optimization for oblique parking

4 结 论

本文在 MATLAB2020b 下,验证了提出的全局优化的数值优化方法经过改善后的热启动在平行、

垂直和斜置停车这些不同泊车场景的可行性和通用性,相比典型算法得到了更平滑的泊车路径,以及更连续更符合实际的控制序列,这为泊车轨迹规划以及轨迹跟踪提供了有效的解决方案。

虽然实际优化求解在不同求解器及硬件条件下的实时性和效率有不同的表现,但本文仅使用 MATLAB 的 fmincon 求解器,更着重算法结果。实际泊车过程的轨迹规划非常依赖于从环境中感知到符合停车要求的车位,以及建立局部可行行驶环境,只由跟踪得到的轨迹并不全面,同时,实车在低速跟踪控制的情况将在后续进行融合感知进一步验证整套泊车算法。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献:

- [1] 胡杰,张敏超,徐文才,等. 自动驾驶车辆的平行泊车轨迹规划[J]. 汽车工程, 2022, 44(3): 330-339.
HU Jie, ZHANG Minchao, XU Wencai, et al. Parallel parking trajectory planning for autonomous vehicles [J]. Automotive Engineering, 2022, 44 (3): 330-339. (in Chinese)
- [2] KIM D, CHUNG W, PARK S. Practical motion planning for car-parking control in narrow environment [J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(1): 129-139.
- [3] VOROBIEVA H, GLASER S, MINOIU-ENACHE N, et al. Automatic parallel parking in tiny spots: Path planning and control [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2015, 16 (1): 396-410.
- [4] MOON J, BAE I, CHA J G, et al. A trajectory planning method based on forward path generation and backward tracking algorithm for Automatic Parking Systems [C]//17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014: 719-724.
- [5] 姜辉,郭孔辉,张建伟. 基于路径规划的自动平行泊车转向控制器[J]. 吉林大学学报(工学版), 2011, 41 (2): 293-297.
JIANG Hui, GUO Konghui, ZHANG Jianwei. Design of automatic parallel parking steering controller based on path-planning [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2011, 41(2):

- 293-297. (in Chinese)
- [6] DEMIRLI K, KHOSHNEJAD M. Autonomous parallel parking of a car-like mobile robot by a neuro-fuzzy sensor-based controller[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160(19): 2876-2891.
- [7] HUA Y D, LI Z X, WU H B, et al. Parking path planning of autonomous vehicle based on B-spline curve [C]//Ninth International Symposium on Sensors, Mechatronics, and Automation System (ISSMAS 2023), 2024: 1234-1240.
- [8] LI S Q, WANG J C. Parallel parking path planning in narrow space based on a Three-stage Curve interpolation method [J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 93841-93851.
- [9] WANG Y B, JHA D K, AKEMI Y. A two-stage RRT path planner for automated parking [C]//2017 13th IEEE Conference on Automation Science and Engineering (CASE 2017), 2018: 496-502.
- [10] KIM M, AHN J, PARK J. TargetTree-RRT*: Continuous-curvature path planning algorithm for autonomous parking in complex environments [J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, 21(1): 606-617.
- [11] 高奇. 无人驾驶自主代客泊车路径规划与跟踪控制策略研究[D]. 西安: 长安大学, 2019.
- [12] CLEVELAND W S. Robust Locally weighted regression and smoothing scatterplots[J]. *Journal of the American Statistical Association*. 1979, 74(368): 829-836.
- [13] REN H B, NIU Y Q, LI Y N, et al. Automatic parking trajectory planning based on warm start nonlinear dynamic optimization[J]. *Sensors*, 2024, 25(1): 1-17.
- [14] HUA B K, CHAI R Q, WANG X Y, et al. A light-weight optimal trajectory planning for smart summon in highly complex and irregular parking lot scenarios [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2024, 25(8): 9192-9203.
- [15] 叶林铨, 祝辉, 梅涛. 基于伪谱法的自主泊车路径规划方法[J]. *计算机工程*, 2017, 43(2): 33-37.
YE Linqun, ZHU Hui, MEI Tao. Autonomous parking path planning method based on pseudospectral method[J]. *Computer Engineering*, 2017, 43(2): 33-37. (in Chinese)
- [16] ZHANG X J, LINIGER A, BORRELLI F. Optimization-based collision avoidance [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2021, 29(3): 972-983.
- [17] HE R X, ZHOU J Y, SHU J, et al. TDR-OBICA: A reliable planner for autonomous driving in free-space environment [C]//2021 American Control Conference (ACC) IEEE, 2021: 2927-2934.
- [18] LI B, ACARMAN T, ZHANG Y M, et al. Optimization-based trajectory planning for autonomous parking with irregularly placed obstacles: A light-weight iterative framework [C]//IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems (ITIS), 2021: 11970-11981.
- [19] ESPOSTO F, GOOS J, TEERHUIS A, et al. Hybrid path planning for non-holonomic autonomous vehicles: An experimental evaluation [C]//5th IEEE International Conference on Models and Technologies for Intelligent Transportation Systems (MT-ITS), 2017: 25-30.
- [20] JIANG M Y, LI Y Y, ZHANG S A, et al. Hope: A reinforcement learning-based hybrid policy path planner for diverse parking scenarios [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2025, 26(5): 6130-6141.
- [21] CHAI R Q, LIU D R, LIU T H, et al. Deep learning-based trajectory planning and control for autonomous ground vehicle parking maneuver [J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2023, 20(3): 1633-1647.
- [22] BEJAR E, MORÁN A. Reverse parking a car-like mobile robot with deep reinforcement learning and preview control [C]//2019 IEEE 9th Annual Computing and Communication Workshop and Conference (CCWC), 2019: 377-383.
- [23] DU Z, MIAO Q H, ZONG C F. Trajectory planning for automated parking systems using deep reinforcement learning[J]. *International Journal of Automotive Technology*, 2020, 21(4): 881-887.
- [24] 张家旭, 王晨, 郭崇, 等. 基于自适应神经模糊推理系统的平行泊车路径规划[J]. *汽车工程*, 2021, 43(3): 323-329.
ZHANG Jiaxu, WANG Chen, GUO Chong, et al. Vehicle parallel parking path planning based on adaptive neuro-fuzzy inference system [J]. *Automotive Engineering*, 2021, 43(3): 323-329. (in Chinese)
- [25] BOYD S P, VANDENBERGHE L. *Convex Optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.