

# 一类含药物阻断的HIV传染病模型分析

周蓉, 薛亚奎\*

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

**摘要:** 基于艾滋病的传播特点, 本文将易感人群细分为有高危行为的易感者和普通的易感者, 考虑药物阻断对艾滋病传播的影响, 建立了一类含药物阻断的 $S_1S_2EIA$ 传染病动力学模型。首先得出了正向不变集, 利用下一代矩阵法计算得出了基本再生数, 进而求解了两类平衡点, 并根据Hurwitz判据和Lyapunov函数证明了两类平衡点是全局渐近稳定的。通过数值模拟和敏感性分析发现: 减小服用HIV阻断药的失效比例和增加在发生高危行为后72 h内服用阻断药的比例都能够减小基本再生数, 使得感染HIV的患者数量下降, 从而有效控制疾病的传播。

**关键词:** HIV; 药物阻断; 局部稳定性; 全局稳定性

中图分类号: O175

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2024.10.0019

**引用格式:** 周蓉, 薛亚奎. 一类含药物阻断的HIV传染病模型分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2026, 47(2): 241-249.

ZHOU Rong, XUE Yakui. Analysis of a class of HIV infectious disease model with drug blockade[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2026, 47(2): 241-249.

## Analysis of a Class of HIV Infectious Disease Model with Drug Blockade

ZHOU Rong, XUE Yakui\*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** Based on the characteristics of AIDS transmission, this paper subdivided the susceptible population into susceptible people with high-risk behaviors and ordinary susceptible people, and considered the impact of drug blockade on AIDS transmission, and established a dynamic model of  $S_1S_2EIA$  infectious disease with drug blockade. Firstly, the forward invariant set was obtained, the basic regeneration number was calculated by using the next-generation matrix method, and then the two types of equilibrium points were solved, and the two types of equilibrium points were proved to be globally asymptotic stable according to the Hurwitz criterion and the Lyapunov function. Through numerical simulation and sensitivity analysis, it is found that reducing the failure rate of HIV blocking drugs and increasing the proportion of patients taking blocking drugs within 72 hours after engaging in high-risk behaviors can reduce the basic reproduction number, so as to reduce the number of patients infected with HIV, so as to effectively control the spread of the disease.

**Key words:** HIV; drug blockade; local stability; global stability

## 0 引言

艾滋病是一种由人类免疫缺陷病毒(Human

Immunodeficiency Virus, HIV)引发的疾病, 这种病毒专门攻击并破坏人体的免疫系统, 特别是细胞免疫功能, 导致机体抵抗力极度下降。这种免疫功能

收稿日期: 2024-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11971278); 山西省自然科学基金资助项目(202203021211086)

作者简介: 周蓉(1999—), 女, 硕士生, 主要从事生物数学的研究。

\* 通信作者: 薛亚奎(1970—), 男, 教授, 博士, 主要从事生物数学的研究。E-mail: xyk5152@163.com。

的缺失使得个体容易遭受各种平时不易感染的机会性病原体侵袭,并可能诱发肿瘤的形成,从而极大地增加了患者的生命危险<sup>[1-2]</sup>。

众多学者从多元化的视角构建了多种 HIV/AIDS 动力学模型。这些模型通过数学语言精准地描绘了 HIV/AIDS 的流行特征、规律及未来可能的发展趋势。例如,Anelone 等<sup>[3]</sup>和 Rong 等<sup>[4]</sup>提出了带年龄结构和治疗的 HIV/AIDS 的模型,分析了系统解的存在性并利用 Lyapunov 函数研究了系统稳态解的稳定性。Farah 等<sup>[5]</sup>提出了一个关于 HIV-1 和 HIV-2 随机共感染的模型,分析了共感染个体,为病毒复制、竞争和耐药突变动力学提供了理论参考,有助于人们更深入地理解 HIV-1 和 HIV-2 共感染的动力学,并可能对治疗策略和疾病管理产生影响。但是,上述关于 HIV 传播动力学的数学模型均是对易感人群进行了同质性的简化假设,一些具有高风险行为特征(如不安全的性行为、输注不安全的血液或血液制品以及共用注射器静脉吸毒等)的易感个体被忽略,而这些具有高风险行为特征的易感个体比普通的易感者更容易感染 HIV,因而导致所得结果与实际情况有一定的偏差。因此,将易感者分为普通的易感者和有高危行为的易感者,考虑具有不同感染率的 HIV 传播模型更具有现实意义。

此外,在传染病的传播过程中,药物阻断对疾病的传播有着重要的影响。目前,已有学者关注到这一问题,如, Yu 等<sup>[6]</sup>和 Wang 等<sup>[7]</sup>提出了通过使用药物来阻断肿瘤和癌症发展的方法。Julg 等<sup>[8]</sup>和 Borducchi 等<sup>[9]</sup>的研究表明,在病毒进入人体细胞并复制前,利用 HIV 阻断药阻断病毒复制所需的关键酶或受体,能够有效阻止 HIV 的感染进程。但是,目前还没有学者通过建立数学模型来研究药物阻断对艾滋病传播的影响。因此,如果在发生高危行为的有效时间内及时服用艾滋病阻断药,就能够有效阻止艾滋病的传播。但是,

服用 HIV 阻断药有时间限制,首次服用必须在暴露后的 72 h 之内且需连续服用 28 d,同时 HIV 阻断药还存在失效的情况,考虑到以上因素,为了更精确地刻画 HIV/AIDS 的传播特性,本文将易感人群细分为有高危行为的易感者和普通的易感者,同时考虑了发生高危行为后 72 h 内服用阻断药的比例和 HIV 阻断药的失效比例对艾滋病传播的影响,进而构建了一个含药物阻断机制的 HIV 传播模型。在此基础上深入探讨了该模型无病平衡点与地方病平衡点的存在条件与稳定性,以及疾病传播的持久性特征。

## 1 模型的建立

本模型将某一地区的人口共分为 5 个仓室:有高危行为的易感者  $S_1$ ,普通的易感者  $S_2$ ,无症状潜伏期的 HIV 感染者  $E$ ,有症状的 HIV 感染者  $I$  以及移除感染者  $A$ 。记  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $A(t)$  分别为  $t$  时刻有高危行为的易感者、普通的易感者、无症状潜伏期的 HIV 感染者、有症状的 HIV 感染者以及移除感染者的数量,并假设:

- 1) 由于媒体技术的发达, HIV 的传播途径之一母婴传播几乎已经断绝,故不考虑母婴传播。
- 2) 有高危行为的易感者的传染率为  $\beta_1$ ,普通的易感者的传染率为  $\beta_2$ 。
- 3) 考虑了在 72 h 内服用艾滋病阻断药的比例,暂不考虑时滞对药物阻断的影响。
- 4) 感染者如首次在 72 h 内服用艾滋病阻断药,则默认感染者知道要在 28 d 内连续服药。
- 5) 无症状潜伏期的 HIV 感染者的含义为全程无症状且具备传染性的 HIV 感染者。
- 6) 移除感染者的含义为艾滋病感染后期将被隔离或移除,不具备传染性。

依据上述分类以及艾滋病的传播特性<sup>[10-14]</sup>,各个仓室之间的人员流动可用图 1 表示。

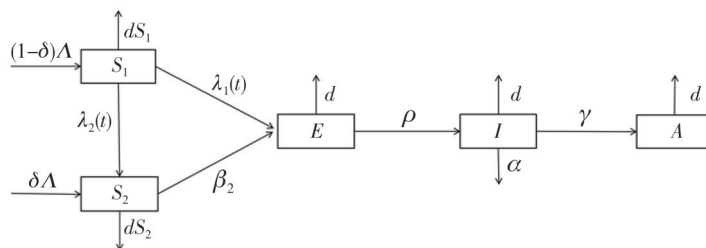


图 1 模型流程图

Fig. 1 Model flowchart

由流程图可以建立模型

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = (1-\delta)\Lambda - \eta\theta\beta_1S_1(E+I) - (1-\eta)\beta_1S_1(E+I) - \eta(1-\theta)\beta_1S_1(E+I) - dS_1, \\ \frac{dS_2}{dt} = \delta\Lambda + \eta(1-\theta)\beta_1S_1(E+I) - \beta_2S_2(E+I) - dS_2, \\ \frac{dE}{dt} = \eta\theta\beta_1S_1(E+I) + (1-\eta)\beta_1S_1(E+I) + \beta_2S_2(E+I) - (d+\rho)E, \\ \frac{dI}{dt} = \rho E - (d+\gamma+\alpha)I, \\ \frac{dA}{dt} = \gamma I - dA. \end{cases} \quad (1)$$

图 1 为 HIV 传播示意图。假设系统(1)的初始条件为  $S_1(0) \geq 0$ ,  $S_2(0) \geq 0$ ,  $E(0) \geq 0$ ,  $I(0) \geq 0$ , 系统(1)的参数均为正数。其中  $S_1$  人群到  $E$  人群的疾病有效传染率为  $\lambda_1(t) = \theta\eta\beta_1S_1(E+I) + (1-\eta)\beta_1S_1(E+I)$ ;  $S_1$  人群到  $S_2$  人群的疾病有效传染率为  $\lambda_2(t) = \eta(1-\theta)\beta_1S_1(E+I)$ ;  $\Lambda$  为易感者的常数输入率;  $\delta$  为  $S_2$  占易感人群的比例;  $\eta$  为在发生高危行为后 72 h 内服用阻断药的比例;  $\theta$  为  $S_1$  人群服用 HIV 阻断药后的失效比例;  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别为  $S_1$  与 HIV 感染者的接触感染率和  $S_2$  与 HIV 感染者的接触感染率;  $\rho$  为 HIV 感染者从  $E$  仓室转移到  $I$  仓室的比率;  $\gamma$  为 HIV 感染者从  $I$  仓室转移到  $A$  仓室的比率;  $d$  为自然死亡率;  $\alpha$  为因病死亡率。

将人口总数设为  $N$ , 则  $N = S_1 + S_2 + E + I + A$ 。将系统(1)的方程相加可得

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \Lambda - dN - \alpha I, \\ \frac{dS_1}{dt} = (1-\delta)\Lambda - \beta_1S_1(E+I) - dS_1, \\ \frac{dS_2}{dt} = \delta\Lambda + \eta(1-\theta)\beta_1S_1(E+I) - \beta_2S_2(E+I) - dS_2, \\ \frac{dE}{dt} = \eta\theta\beta_1S_1(E+I) + (1-\eta)\beta_1S_1(E+I) + \beta_2S_2(E+I) - (d+\rho)E, \\ \frac{dI}{dt} = \rho E - (d+\gamma+\alpha)I. \end{cases} \quad (2)$$

对于系统(2), 考虑无病平衡点  $P_0 = (S_1^0, S_2^0, E^0, I^0)$ 。令系统(2)右端等于 0, 且  $I=0$ , 可以得到

$$E^0 = 0, S_1^0 = \frac{(1-\delta)\Lambda}{d}, S_2^0 = \frac{\delta\Lambda}{d}.$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\Lambda\beta_1(1-\delta)[\theta\eta+(1-\eta)]}{d} + \frac{\Lambda\delta\beta_2}{d} & \frac{\Lambda\beta_1(1-\delta)[\theta\eta+(1-\eta)]}{d} + \frac{\Lambda\delta\beta_2}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即  $dN/dt + dN \leq \Lambda$ , 对不等式进行积分, 可得

$$N(t) \leq \frac{\Lambda}{d} + \left(N(0) - \frac{\Lambda}{d}\right)e^{-dt}.$$

从而

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{d}.$$

因此得到系统(1)的正向不变集

$$\Omega = \{(S_1, S_2, E, I, A) \in \mathbb{R}_+^5 \mid 0 \leq S_1 + S_2 + E + I + A \leq \frac{\Lambda}{d}\}.$$

本文将在指定的区间  $\Omega$  内分析系统(1)的动力学特性。

## 2 平衡点与基本再生数

由于系统(1)的前 4 个方程不包含变量  $A$ , 所以可以对系统(1)进行简化, 且仅关注子系统

$$\text{因此无病平衡点 } P_0 = \left(\frac{(1-\delta)\Lambda}{d}, \frac{\delta\Lambda}{d}, 0, 0\right).$$

利用下一代矩阵法求系统(2)的基本再生数。

$$V = \begin{bmatrix} d + \rho & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & d + \gamma + \alpha & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1}{d} & \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1}{d} & d & 0 \\ \frac{\Lambda\delta\beta_2}{d} - \frac{(1-\theta)\Lambda(1-\delta)\beta_1\eta}{d} & \frac{\Lambda\delta\beta_2}{d} - \frac{(1-\theta)\Lambda(1-\delta)\beta_1\eta}{d} & 0 & d \end{bmatrix},$$

则

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\Lambda\beta_1(1-\delta)[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d(d+\rho)(d+\gamma+\alpha)}(d+\gamma+\alpha+\rho) & \frac{\Lambda\beta_1(1-\delta)[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d(d+\gamma+\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基本再生数  $R_0$  为矩阵  $FV^{-1}$  的谱半径, 则

$$R_0 = \frac{\Lambda\beta_1(1-\delta)[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d\omega_1\omega_2}(\omega_2+\rho),$$

其中,  $\omega_1 = d + \rho$ ,  $\omega_2 = d + \gamma + \alpha$ 。

**定理 1** 当  $R_0 > 1$  时, 系统(2)存在唯一的地方病平衡点  $P^*$ 。

**证明** 设系统(2)存在地方病平衡点  $P^* = (S_1^*, S_2^*, E^*, I^*)$ 。令

$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{dS_1}{dt} = (1-\delta)\Lambda - \beta_1 S_1(E+I) - dS_1, \\ f_2(t) = \frac{dS_2}{dt} = \delta\Lambda + \eta(1-\theta)\beta_1 S_1(E+I) - \beta_2 S_2(E+I) - dS_2, \\ f_3(t) = \frac{dE}{dt} = \eta\theta\beta_1 S_1(E+I) + (1-\eta)\beta_1 S_1(E+I) + \beta_2 S_2(E+I) - (d+\rho)E, \\ f_4(t) = \frac{dI}{dt} = \rho E - (d+\gamma+\alpha)I, \end{cases} \quad (3)$$

则系统(2)存在地方病平衡点  $P^*$ 。

由  $f_1(t) = 0$ ,  $f_2(t) = 0$  和  $f_4(t) = 0$  可得

$$E^* = \frac{\omega_2}{\rho} I^*, S_1^* = \frac{\Lambda(1-\delta)\rho}{\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho},$$

$$S_2^* = \frac{\Lambda\delta\rho[\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho] + \Lambda\eta\rho\beta_1(1-\theta)(1-\delta)(\omega_2+\rho)I^*}{[\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho][\beta_2(\omega_2+\rho)I^* + d\rho]}.$$

将  $E^*$ ,  $S_1^*$  和  $S_2^*$  代入  $f_3(t) = 0$  中, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(1-\delta)\rho\theta\eta\beta_1}{\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho} \left( \frac{\omega_2}{\rho} I^* + I^* \right) + \frac{\Lambda\rho\beta_1(1-\delta)(1-\eta)}{\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho} \left( \frac{\omega_2}{\rho} I^* + I^* \right) + \\ & \frac{\Lambda\delta\rho\beta_2[\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho] + \Lambda\eta\rho\beta_1\beta_2(1-\theta)(1-\delta)(\omega_2+\rho)I^*}{[\beta_1(\omega_2+\rho)I^* + d\rho][\beta_2(\omega_2+\rho)I^* + d\rho]} \left( \frac{\omega_2}{\rho} I^* + I^* \right) - \frac{\omega_1\omega_2}{\rho} I^* = 0. \end{aligned}$$

整理上式得到关于  $I^*$  的一元二次方程

$$a_1 I^{*2} + a_2 I^* + a_3 = 0,$$

其中,

$$a_1 = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2(\omega_2+\rho)^2,$$

$$a_2 = d\rho\omega_1\omega_2(\omega_2+\rho)(\beta_1+\beta_2) - \Lambda\rho\beta_1\beta_2(\omega_2+\rho)^2,$$

$$a_3 = d^2\rho^2\omega_1\omega_2(1-R_0).$$

当  $R_0 > 1$  时, 可知  $a_1 > 0$ ,  $a_3 < 0$ , 所以在一

元二次方程中有  $I_1 I_2 = \frac{a_3}{a_1} < 0$ , 因此方程有且只有

一个正根, 得系统(2)存在唯一的地方病平衡点  $P^*$ 。即定理 1 得证。

### 3 平衡点的稳定性

**定理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 则系统(2)的无病平衡点  $P_0$  是局部渐近稳定的; 当  $R_0 > 1$  时, 则系统(2)的地方病平衡点  $P_0$  是不稳定的。

**证明** 系统(2)在  $P_0$  点处的 Jacobian 矩阵为

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -d & 0 & \frac{-\Lambda(1-\delta)\beta_1}{d} & \frac{-\Lambda(1-\delta)\beta_1}{d} \\ 0 & -d & \frac{\Lambda\eta\beta_1(1-\theta)(1-\delta)-\Lambda\delta\beta_2}{d} & \frac{\Lambda\eta\beta_1(1-\theta)(1-\delta)-\Lambda\delta\beta_2}{d} \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d} - \omega_1 & \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d} \\ 0 & 0 & \rho & -\omega_2 \end{bmatrix}.$$

下面计算此矩阵的特征值。因为

$$\det(\lambda I - J(P_0)) = \begin{vmatrix} \lambda + d & 0 & \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1}{d} & \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1}{d} \\ 0 & \lambda + d & \frac{\Lambda\delta\beta_2 - \Lambda\eta\beta_1(1-\delta)(1-\eta)}{d} & \frac{\Lambda\delta\beta_2 - \Lambda\eta\beta_1(1-\delta)(1-\eta)}{d} \\ 0 & 0 & \lambda + \omega_1 - \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d} & -\frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d} \\ 0 & 0 & -\rho & \lambda + \omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda + d)^2 g_1(\lambda),$$

所以该特征方程的两个根是  $\lambda_1 = \lambda_2 = -d$ , 其他根满足  $g_1(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ .

其中,

$$b_1 = \omega_1 + \omega_2 - \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d} > \omega_1\omega_2[1-(\omega_2+\rho)R_0],$$

$$b_2 = \omega_1\omega_2 - \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)]+\Lambda\delta\beta_2}{d}(\omega_2+\rho) = \omega_1\omega_2(1-R_0).$$

若  $R_0 < 1$ , 则有  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ 。根据 Hurwitz 判据的判断, 可以得知  $g_1(\lambda)$  的所有根均具有负实部, 即当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点呈现出局部渐近稳定的特性。

若  $R_0 > 1$  时, 显然有  $b_2 < 0$ 。由根与系数的关系可知  $\lambda_3\lambda_4 = -b_2 > 0$ , 故  $\lambda_3, \lambda_4$  中至少存在一个正根, 所以在无病平衡点  $P_0$  处不稳定, 即定理 2 得证。

**定理 3** 当  $R_0 < 1$  时, 则系统 (2) 的无病平衡点  $P_0$  是全局渐近稳定的。

**证明** 构造 Lyapunov 函数

$$V = E + \frac{[\theta\eta+(1-\eta)]\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2}{\omega_2} I_0.$$

沿着系统 (2) 的解对  $V$  进行求导, 得

$$\det(\lambda I - J(P^*)) = \begin{vmatrix} \lambda + \beta_1(E^* + I^*) + d & 0 & \beta_1 S_1^* & \beta_1 S_1^* \\ (1-\theta)\eta\beta_1(E^* + I^*) & \lambda + \beta_2(E^* + I^*) + d & -(1-\theta)\eta\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^* & -(1-\theta)\eta\beta_1 S_1^* + \beta_2 S_2^* \\ -[\theta\eta+(1-\eta)]\beta_1(E^* + I^*) & -\beta_2(E^* + I^*) & \lambda + \omega_1 - [\theta\eta+(1-\eta)]\beta_1 S_1^* - \beta_2 S_2^* & -[\theta\eta+(1-\eta)]\beta_1 S_1^* - \beta_2 S_2^* \\ 0 & 0 & -\rho & \lambda + \omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$\dot{V} = \dot{E} + \frac{[\theta\eta+(1-\eta)]\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2}{\omega_2} \dot{I} =$$

$$\{\beta_1 S_1[\theta\eta+(1-\eta)] + \beta_2 S_2\}(E + I) - \omega_1 E +$$

$$\frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)] + \Lambda\delta\beta_2}{d\omega_2}(\rho E - \omega_2 I) \leq$$

$$\left(\frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)] + \Lambda\delta\beta_2}{d}\right)(E + I) -$$

$$\omega_1 E + \frac{\Lambda(1-\delta)\beta_1[\theta\eta+(1-\eta)] + \Lambda\delta\beta_2}{d\omega_2}(\rho E - \omega_2 I) \leq$$

$$T(E + I) - \omega_1 E + \frac{T}{\omega_2}(\rho E - \omega_2 I) =$$

$$TE + \frac{\rho TE}{\omega_2} - \omega_1 E = \frac{(\omega_2 + \rho)TE}{\omega_2} - \omega_1 E =$$

$$\omega_1(R_0 - 1)E.$$

所以当  $R_0 \leq 1$  时,  $\dot{V} \leq 0$ 。由 Lasalle 不变原理, 得到无病平衡点  $P_0$  是全局渐近稳定的, 即定理 3 得证。

**定理 4** 当  $R_0 > 1$ ,  $c_i > 0 (i = 1 \cdots 4)$ ,  $d_1 > 0$ ,  $e_1 > 0$  时, 则系统 (2) 的地方病平衡点  $P^*$  是局部渐近稳定的。

**证明** 类似于定理 3 的证明方法, 计算下面特征方程的特征值

$$g_2(\lambda) = \lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4,$$

其中,

$$\begin{aligned} c_1 &= \omega_1 + \omega_2 + A_1 + A_2 + 2d - [\theta\eta + (1-\eta)]A_1 - B_2, \\ c_2 &= \omega_2(A_1 + d) + (A_1 + d)(\omega_1 - B_2) + (\omega_2 + A_2 + d)(\omega_2 + A_1 + d - B_2) - (\omega_2 + A_2 + d)[\theta\eta + (1-\eta)]A_1 - A_1(B_1 - A_1 - d)[\theta\eta + (1-\eta)], \\ c_3 &= (A_1 + d)(\omega_2 + A_2 + d)(\omega_1 - B_2) + \omega_2(A_2 + d)(d + A_1 + \omega_1 - B_2) - \omega_2A_1(A_2 + d)[\theta\eta + (1-\eta)] - A_1[\theta\eta + (1-\eta)](B_1 - A_1 - d), \\ c_4 &= \omega_2(A_1 + d)(A_2 + d)(\omega_1 - B_2) - \omega_2A_1(A_2 + d)[\theta\eta + (1-\eta)](B_1 - A_1 - d) - (1-\theta)\eta\rho A_1A_2B_1, \end{aligned}$$

这里,  $A_1 = \beta_1(E^* + I^*)$ ,  $A_2 = \beta_2(E^* + I^*)$ ,  $B_1 = \beta_1S_1^*$ ,  $B_2 = \beta_2S_2^*$ 。列出相应的劳斯表, 如表 1 所示。

表 1 劳斯表

Tab. 1 Rolls chart

|             |       |       |       |
|-------------|-------|-------|-------|
| $\lambda^4$ | 1     | $c_2$ | $c_4$ |
| $\lambda^3$ | $c_1$ | $c_3$ |       |
| $\lambda^2$ | $d_1$ | $d_2$ |       |
| $\lambda^1$ | $e_1$ |       |       |
| $\lambda^0$ | $f_1$ |       |       |

表 1 中:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{c_1c_2 - c_3}{c_1}, d_1 = \frac{c_1c_4}{c_1} = c_4, \\ e_1 &= \frac{d_1c_3 - c_1d_2}{d_1}, f_1 = \frac{e_1d_2}{e_1} = d_2 = c_4. \end{aligned}$$

由 Routh 判据知, 当  $R_0 > 1$ ,  $c_i > 0 (i = 1, \dots, 4)$ ,  $d_1 > 0$ ,  $e_1 > 0$  时, 系统(2)在地方病平衡点  $P^*$  处局部渐近稳定, 即定理 4 得证。

**定理 5** 当  $R_0 > 1$  时, 则系统(2)的地方病平衡点  $P^*$  是全局渐近稳定的。

**证明** 构造 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} L &= \left( S_1 - S_1^* - S_1^* \ln \frac{S_1}{S_1^*} \right) + \left( S_2 - S_2^* - S_2^* \ln \frac{S_2}{S_2^*} \right) + \left( E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) + \\ &\quad \frac{[\theta\eta + (1-\eta)]\beta_1S_1^* + \beta_2S_2^*}{\rho E^*} \left( I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right). \end{aligned}$$

沿着模型(2)的解对  $L$  进行求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \left( 1 - \frac{S_1}{S_1^*} \right) \dot{S}_1 + \left( 1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \dot{S}_2 + \left( 1 - \frac{E}{E^*} \right) \dot{E} + \frac{[\theta\eta + (1-\eta)]\beta_1S_1^* + \beta_2S_2^*}{\rho} \left( 1 - \frac{I}{I^*} \right) \dot{I} = \\ &\quad \left( 1 - \frac{S_1}{S_1^*} \right) [(1-\delta)\Lambda - \beta_1S_1(E+I) - dS_1] + \\ &\quad \left( 1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) [\delta\Lambda + \eta(1-\theta)\beta_1S_1(E+I) - \beta_2S_2(E+I) - dS_2] + \\ &\quad \left( 1 - \frac{E}{E^*} \right) [\theta\eta\beta_1S_1(E+I) + (1-\eta)\beta_1S_1(E+I) + \beta_2S_2(E+I) - \omega_1E] + \\ &\quad \frac{[\theta\eta + (1-\eta)]\beta_1S_1^* + \beta_2S_2^*}{\rho} \left( 1 - \frac{I}{I^*} \right) [\rho E - \omega_2I] = \\ &\quad \{ [\theta\eta + (1-\eta)]\beta_1S_1^*E^* + dS_1^* \} \left( 2 - \frac{S_1^*}{S_1} - \frac{S_1}{S_1^*} \right) + (\beta_2S_2^*E^* + dS_2^*) \left( 2 - \frac{S_2^*}{S_2} - \frac{S_2}{S_2^*} \right) + \\ &\quad [\theta\eta + (1-\eta)]\beta_1S_1^*I^* \left( 3 - \frac{EI^*}{E^*I} - \frac{S_1^*}{S_1} - \frac{S_1E^*I}{S_1^*EI^*} \right) + \beta_2S_2^*I^* \left( 3 - \frac{EI^*}{E^*I} - \frac{S_2^*}{S_2} - \frac{S_2E^*I}{S_2^*EI^*} \right). \end{aligned}$$

由算术平均值和几何平均值的关系, 有

$$\begin{aligned} \left( 2 - \frac{S_1^*}{S_1} - \frac{S_1}{S_1^*} \right) &\leq 0, \left( 2 - \frac{S_2^*}{S_2} - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \leq 0, \\ \left( 3 - \frac{EI^*}{E^*I} - \frac{S_1^*}{S_1} - \frac{S_1E^*I}{S_1^*EI^*} \right) &\leq 0, \\ \left( 3 - \frac{EI^*}{E^*I} - \frac{S_2^*}{S_2} - \frac{S_2E^*I}{S_2^*EI^*} \right) &\leq 0, \end{aligned}$$

所以有  $\dot{L} \leq 0$ 。由 Lasalle 不变原理, 得到地方病平衡点  $P^*$  是全局渐近稳定的, 即定理 5 得证。

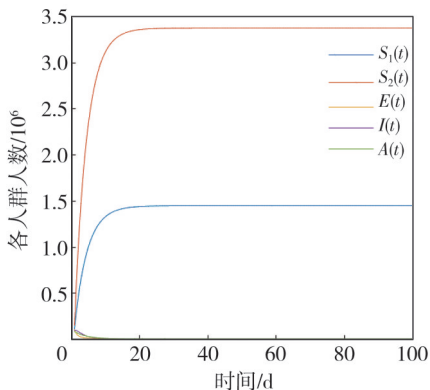
## 4 数值模拟

为了验证理论分析, 本文对系统(2)进行数值模拟。初始条件设置为  $S_1 = 1.1 \times 10^5$ ,  $S_2 = 1.5 \times 10^5$ ,  $E = 1.0 \times 10^5$ ,  $I = 0.9 \times 10^4$ ,  $A = 0.8 \times 10^4$ , 系统(2)的其他参数取值见表 2, 参数取值主要来源于文献[14]。

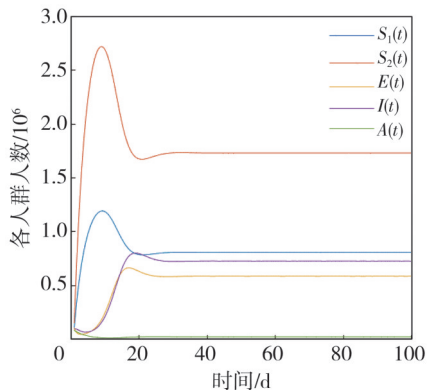
表 2 参数取值  
Tab. 2 Parameter value

| 参数        | 取值                         | 来源   |
|-----------|----------------------------|------|
| $\Lambda$ | $1.349\ 255 \times 10^6$   | [14] |
| $\beta_1$ | $1.708\ 1 \times 10^{-11}$ | [14] |
| $\delta$  | 0.7                        | 假设   |
| $\rho$    | 0.818 3                    | [14] |
| $d$       | 0.23                       | 假设   |
| $\alpha$  | 0.371 2                    | [14] |
| $\beta_2$ | $2.102\ 2 \times 10^{-10}$ | [14] |
| $\theta$  | 0.025                      | 假设   |
| $\gamma$  | 0.007 8                    | [14] |
| $\eta$    | 0.004 8                    | 假设   |

图 2(a)展示了无病平衡点的稳定性模拟结果。仅改变  $d=0.088$ , 此时  $R_0 \approx 0.328\ 2 < 1$ , 无病平衡点  $P_0$  在  $\Omega$  条件下呈现全局渐近稳定的特性; 图 2(b)通过采用表 2 中列取的参数值, 并取  $\theta=0.025$ ,  $\gamma=0.007\ 8$ , 此时  $R_0 \approx 3.386\ 1 > 1$ , 地方病平衡点  $P^*$  在  $\Omega$  条件下是全局渐近稳定的。



(a) 无病平衡点



(b) 地方病平衡点

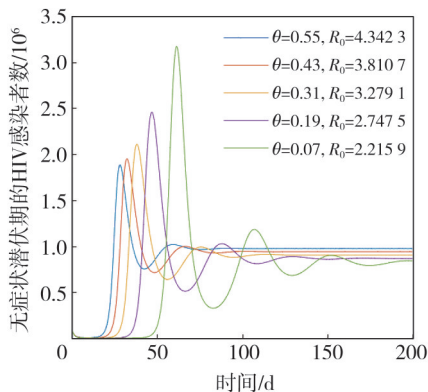
图 2 平衡点的稳定性

Fig.2 Stability of the equilibrium point

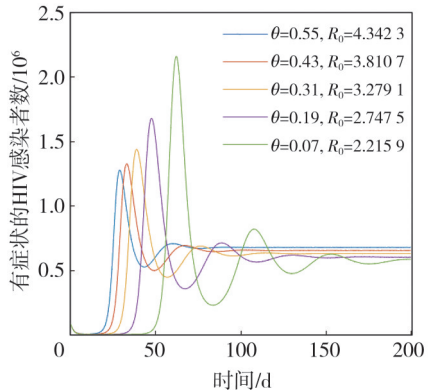
为了研究在 72 h 内服用 HIV 阻断药的比例  $\eta$  和服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  对艾滋病传播的影响, 在初始条件下, 系统(2)的其他取值以给定的参数为基准, 改变在 72 h 内服用 HIV 阻断药的

比例  $\eta$  和服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$ , 得出  $\eta$  和  $\theta$  随时间变化的结果, 如图 3 和图 4 所示。

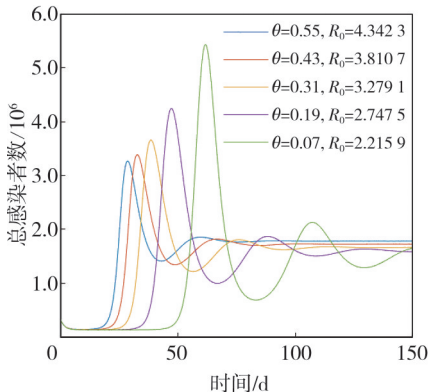
图 3 展示了服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  对无症状潜伏期的 HIV 感染者数量、有症状的 HIV 感染者数量以及总感染者数量的影响。



(a) 对无症状潜伏期的 HIV 感染者的影响



(b) 对有症状的 HIV 感染者的影响



(c) 对总感染者人数的影响

图 3 服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  对 HIV 患者的影响

Fig. 3 Effect of failure rate  $\theta$  taking HIV blocking drugs on HIV patients

图 3(a) 和 3(b) 显示, 随着服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  的减小, 无症状潜伏期的 HIV 感染者数量和有症状的 HIV 感染者数量先不变, 在达到峰值后趋于稳定, 并且到达峰值的时间也在往后推迟,

而图 3(c) 显示总感染者的数量也逐渐减小并趋于稳定。可见, 减小服用 HIV 阻断药的失效比例在减少死亡人数和控制疫情扩散方面是非常重要的, 应广泛宣传 HIV 阻断药, 有效阻止艾滋病的传播。

图 4 展示了在 72 h 内服用 HIV 阻断药比例  $\eta$  对无症状潜伏期的 HIV 感染者数量、有症状的 HIV 感染者数量以及总感染者数量的影响。

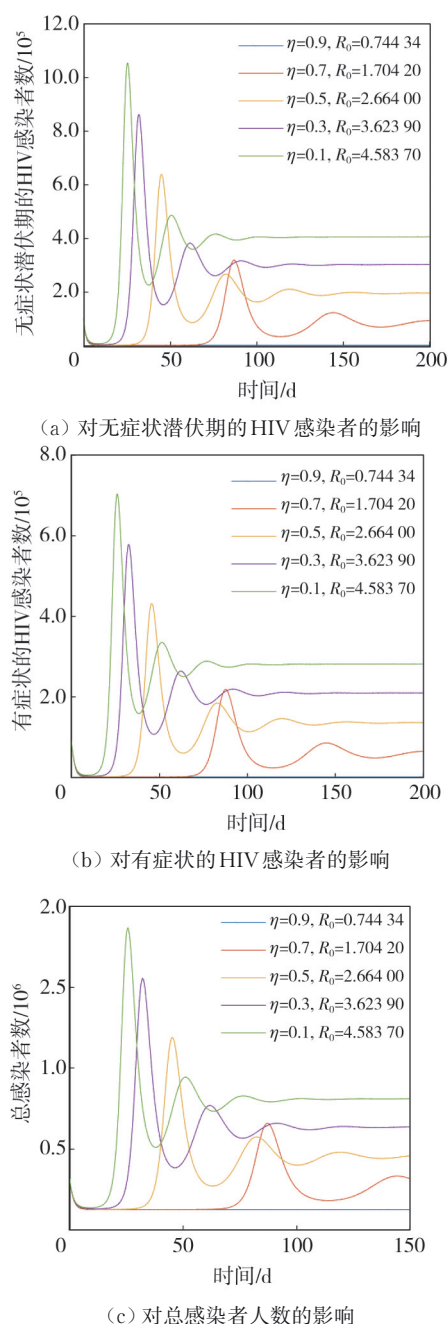


图 4 72 h 内服用 HIV 阻断药比例  $\eta$  对 HIV 患者的影响

Fig. 4 Effect of the proportion  $\eta$  taking HIV blocking drugs within 72 hours on HIV patients

图 4 显示, 随着增大 72 h 内服用 HIV 阻断药比例  $\eta$  的增大, 无症状潜伏期的 HIV 感染者数量、有症

状的 HIV 感染者数量和总感染者数量不断下降并趋于稳定, 并且其峰值也在不断降低, 到达峰值的时间也在往后推迟。由此可见, 越早服用 HIV 阻断药, 阻止疫情传播的概率越大, 应广泛宣传 HIV 阻断药的服用时效, 有效阻止艾滋病的传播。

图 3 和图 4 整体显示, 随着服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  的减小和 72 h 内服用 HIV 阻断药比例  $\eta$  的增大, 无症状潜伏期的 HIV 感染者数量、有症状的 HIV 感染者数量以及总感染者数量都在达到峰值后减少, 说明服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  和 72 h 内服用 HIV 阻断药的比例  $\eta$  都对减少死亡人数和控制疫情有帮助且效果明显。

对于系统(2), 其针对局部参数的敏感性已在图 5 中进行了展示。由图 5 可以看出, 72 h 内服用 HIV 阻断药的比例  $\eta$  与  $R_0$  呈负相关; 服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  与  $R_0$  呈正相关。因此, 减小服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  和增加 72 h 内服用 HIV 阻断药的比例  $\eta$ , 都能够减少死亡人数并能够有效抑制艾滋病的传播。

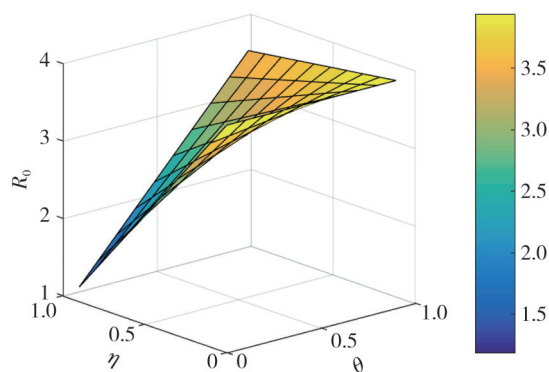


图 5  $R_0$  局部敏感性分析

Fig. 5 Local sensitivity analysis of  $R_0$

## 5 结 论

本文针对艾滋病的传播机制, 建立了一类含药物阻断的  $S_1S_2EIA$  传染病模型。利用下一代矩阵法计算得出 HIV 是否流行的阈值参数  $R_0$ , 求解了两类平衡点, 并依据 Hurwitz 判据和 Lyapunov 函数的分析, 证明了无病平衡点在特定条件下既是局部渐近稳定的, 也是全局渐近稳定的。地方病平衡点在  $R_0 > 1$  时是局部和全局渐近稳定的。对基本再生数  $R_0$  进行了局部分析, 数值模拟结果表明:

1) 要控制艾滋病的传播, 就要降低服用 HIV 阻断药的失效比例  $\theta$  和增加 72 h 内服用 HIV 阻断

药的比例 $\eta$ , 当与不确定对方身体情况人群发生此类高危行为时, 要及时并遵医嘱连续服用 HIV 阻隔药, 做到有效阻止 HIV 的传播。

2) 采取防护措施和输注血液时采取一次性注射器等可以增大参数 $\delta$ , 要养成良好的卫生习惯, 当不小心接触到不明液体和血液时, 不要触碰眼睛、口腔、鼻子等黏膜以及伤口处, 要及时进行消毒洗手, 减少 $S_1$ 人群的输入量, 做好个人防护, 从根源处有效切断艾滋病的传播。

3) 对比以前不含药物阻断的艾滋病模型, 研究发现药物阻断是影响感染人数的重要因素, 比之前没有药物阻断的模型更加符合当今现状, 能更准确地描述艾滋病的传播过程, 做到有效阻断艾滋病的传播。

### 利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

### 参考文献:

- [1] GOTTLIEB M S. Pneumocystis pneumonia: Los-angeles[J]. American Journal of Public Health, 2006, 96(6): 980-981.
- [2] BENNETT J E, DOLIN R, BLASER M J. Mandell, Douglas, and Bennett's principles and practice of infectious diseases [M]. 9th ed. Philadelphia: Elsevier, 2020.
- [3] ANELONE A J, SPURGEON S K. Prediction of the containment of HIV infection by antiretroviral therapy-a variable structure control approach[J]. IET Systems Biology, 2017, 11(1): 44-53.
- [4] RONG L B, FENG Z L, PERELSON A S. Mathematical analysis of age-structured HIV-1 dynamics with combination antiretroviral therapy[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2007, 67(3): 731-56.
- [5] FARAHA E M, HAJRI Y, ASSIRI T A, et al. A stochastic co-infection model for HIV-1 and HIV-2 epidemic incorporating drug resistance and dual saturated incidence rates [J]. Alexandria Engineering Journal, 2023 84(1): 24-36.
- [6] YU Y K, ZHANG F, XIAO W, et al. Adaptive design of nanovesicles overcoming immunotherapeutic limitations of chemotherapeutic drugs through poliovirus receptor blockade[J]. ACS Nano, 2024, 18(7): 5915-5929.
- [7] WANG S M, ZHOU X R, ZENG Z K, et al. Atovaquone-HSA nano-drugs enhance the efficacy of PD-1 blockade immunotherapy by alleviating hypoxic tumor microenvironment [J]. Journal of Nanobiotechnology, 2021 19(1): 302.
- [8] JULG B, WALKER-SPERLING V E, WAGH K, et al. Safety and antiviral effect of a triple combination of HIV-1 broadly neutralizing antibodies: A phase 1/2a trial [J]. Nature Medicine, 2024, 30(12): 3534-3543.
- [9] BORDUCCHI E N, LIU J, NKOLOLA J P, et al. Antibody and TLR7 agonist delay viral rebound in SHIV-infected monkeys [J]. Nature, 2018, 563(7731): 360-364.
- [10] 宫红艳, 薛亚奎. 一类具有标准发生率的 SEIR 传染病模型的稳定性分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(4): 448-454.  
GONG Hongyan, XUE Yakui. Stability analysis of a class of SEIR infectious disease models with standard incidence [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2024, 45(4): 448-454. (in Chinese)
- [11] 李桂花, 张彩霞. 一类具有免疫反应和抗逆转录病毒治疗的 HIV 病毒传染病模型的动力学性态分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2017, 38(3): 255-259.  
LI Guihua, ZHANG Caixia. An epidemic model analysis of HIV virus with immune response and anti-retroviral treatment [J]. Journal of North University of China: Natural Science Edition, 2017, 38(3): 255-259. (in Chinese)
- [12] 王美艳, 薛亚奎. 受媒体报道影响的 SEIAQRS 传染病模型分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(1): 74-82.  
WANG Meiyan, XUE Yakui. Analysis of SEIAQRS epidemic model effected by media coverage [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2024, 45(1): 74-82. (in Chinese)
- [13] 刘茂省, 周义仓. 一类有年龄结构的 HIV 传播动力学模型研究[J]. 华北工学院学报, 2004, 25(2): 87-91.  
LIU Maoxing, ZHOU Yicang. An age-structured dynamic model of HIV [J]. Journal of North China Institute of Technology, 2004, 25(2): 87-91. (in Chinese)
- [14] 龚道远, 李智明, 张宇翔, 等. SWEIA 艾滋病毒传染模型及应用[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(6): 170-179.  
GONG Daoyuan, LI Zhiming, ZHANG Yuxiang, et al. SWEIA HIV/AIDS epidemic model and application [J]. Mathematics in Practice and Theory 2017, 47(6): 170-179. (in Chinese)