

自适应网络上带有医疗资源的传染病建模与分析

安国荣, 李淑萍*

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 本文建立了自适应网络中带有医疗资源的SIS传染病模型, 研究了适应性行为与医疗资源对疾病传播的影响。采用泊松分布下的三元组逼近公式封闭系统。由无病平衡点的稳定性得到了基本再生数 R_0 , 通过排除特殊点的方法与Hurwitz判据分别分析了地方病平衡点的存在性与稳定性。当 $R_0 < 1$ 时, 在医疗资源增加但未达上限时, 治愈率 δ 与治疗延误的影响程度 α 都会导致后向分支的发生; 而重连率 ω 会引发后向分支、鞍结点分支和Hopf分支。模拟结果表明, 当 $R_0 < 1$ 时系统会出现双稳态与稳定极限环。

关键词: 自适应网络; 医疗资源; 分支; 双稳态; 稳定极限环

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.04.0004

引用格式: 安国荣, 李淑萍. 自适应网络上带有医疗资源的传染病建模与分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2026, 47(2): 250-262.

AN Guorong, LI Shuping. Modelling and analysis of infectious disease with medical resources on adaptive network[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2026, 47(2): 250-262.

Modelling and Analysis of Infectious Disease with Medical Resources on Adaptive Network

AN Guorong, LI Shuping*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: A SIS infectious disease model with medical resources in the adaptive network was established, and the influence of adaptive behavior and medical resources on the spread of disease was studied. The system was closed by using the triple approximation formula under the Poisson distribution. The basic reproduction number R_0 is obtained from the stability of the disease-free equilibrium. The existence and stability of endemic equilibrium are analyzed separately using the method of excluding special points and the Hurwitz criterion. As medical resources increase but have not yet reached the upper limit when $R_0 < 1$, the cure rate δ and the degree of impact α caused by delayed treatment can both lead to the occurrence of backward bifurcation; while the rewiring rate ω can trigger backward bifurcation, saddle-node bifurcation and Hopf bifurcation. The simulations indicate that the bistability and stable limit cycle occur when $R_0 < 1$.

Key words: adaptive networks; medical resources; bifurcation; bistability; stable limit cycle

0 引言

长期以来, 为了加深人类对疾病传播机制的了

解, 许多学者都采用数学模型来研究疾病的传播动态。这种方法的起源可以追溯到1760年对天花传播的研究^[1-2]。早期建立并研究的流行病模型主要是基

收稿日期: 2025-04-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701528, 12101574), 山西省自然科学基金项目(20210302124621)

作者简介: 安国荣(1998—), 男, 硕士生, 主要从事应用数学的研究。

* 通信作者: 李淑萍(1979—), 女, 副教授, 博士, 主要从事应用数学的研究。E-mail: 1spnuc@126.com。

于均匀同质混合的假设。模型假定人口间的混合均匀,即每个个体之间的接触不存在差异,所有人接触其他个体的机会均等^[1]。然而,该假设未能真实反映现实中人类交往的多样性与活动范围的有限性。因此,随着复杂网络理论不断发展,更多学者开始关注疾病在网络中的传播,用以更精确地描述疾病传播的过程。

近年来,疾病在复杂网络上的建模引起了广泛的关注。现实世界中,人与人之间的社交关系可看作一个社会网络。其中,节点代表个体,节点间的连边代表个体之间有接触行为。对于疾病在复杂网络上的建模,比较典型的有 Pastor-Satorras 等^[3]提出的无标度网络上的 SIS 传染病模型,该模型研究了网络的异质性疾病传播的影响,并发现当节点的度服从幂律分布时不存在传

播阈值。另一种经典的传染病模型是基于网络连边的对逼近模型。例如, Luo 等^[4]研究了规则和随机网络上的 SIS 对逼近模型,并详细给出了平衡点稳定性的证明。Wu 等^[5]研究了加权网络上的 SIS 流行病模型的阈值条件。上述两种经典模型都假设网络的拓扑结构不变,是静态网络上的传染病模型。然而,现实社会中发生感染行为时,人们会减少甚至中断与感染个体的接触,同时选取较为安全的个体作为新的邻居,即网络的拓扑结构会随着节点状态的变化而动态调整。刻画这类现象的网络模型被称为自适应网络模型。近年来,疾病在自适应网络上的传播被关注^[6-9]。最早的自适应网络上的传染病模型由 Gross 等提出,并用数值模拟的方法验证了后向分支、Hopf 分支动力学行为的发生^[6]。其模型为

$$\begin{cases} \dot{[S]} = -\tau[SI] + r[I], \\ \dot{[I]} = \tau[SI] - r[I], \\ \dot{[SS]} = 2r[SI] - 2\tau[SSI] + 2\omega[SI], \\ \dot{[SI]} = -r[SI] + r[II] - \tau[SI] - \tau[ISI] + \tau[SSI] - \omega[SI], \\ \dot{[II]} = -2r[II] + 2\tau[SI] + 2\tau[ISI]. \end{cases} \quad (1)$$

Zhang 等^[10]对该模型进行了详细的数学分析,并证明了 BT 分支及双极限环的发生。Lu 等^[11]采用新的矩封闭验证了该模型会发生跨临界分支、鞍结点分支、后向分支与 Hopf 分支,并验证了系统存在双稳态与振荡。Bodó 等^[12]分析了该模型参数平面的稳定性,并用参数表示方法给出鞍结点分支与 Hopf 分支曲线,模拟发现同宿轨分支会导致不稳定周期轨道的发生,倍周期分支导致双极限环消失。

在生活中,医疗能对控制和预防疾病暴发起到很好的作用。例如,肺结核、荨麻疹等疾病发生时,通过治疗可以有效防止其传播。常见的治疗函数中,一种是分段线性治疗函数 $h(I) = \begin{cases} \delta I & 0 \leq I \leq I_0 \\ m = \delta I_0 & I > I_0 \end{cases}$, 其中 I_0 为治疗能力达到最大值时的感染水平^[13]; 另一种是非线性饱和治疗函数 $h(I) = \frac{\delta I}{1 + \alpha I}$, 其中 α 为染病者治疗延误的影响程度, δ 为治愈率,当染病者数量 I 较小时, $h(I) \approx 0$, 反之, $h(I) \approx \frac{\delta}{\alpha}$, 这意味着治疗将趋于饱和^[14]。Lu 等^[15]研究了自适应网络上线性治疗函数的流行病模型动态行为。本文将在 Gross 等提出的自适应网络上的传染病模型基础上,考虑非

线性连续可微的饱和治疗函数,采用泊松分布下的三元组逼近公式封闭系统并研究降维后的系统。由无病平衡点的稳定性得到疾病传播的基本再生数 R_0 , 利用参数间的矛盾排除特殊点的方法分析地方病平衡点的存在性,并由 Hurwitz 判据分析地方病平衡点的稳定性。最后通过模拟分析系统的其他动力学行为。

1 模型的建立

考虑包含点集 P 与边集 K 的自适应网络 $W = (P, K)$ 。假设网络无孤立节点,用 $N = |P|$ 表示网络总节点数;用 $nN = |K|$ 表示网络总边数,其中 n 为网络的平均度,并规定 $n > 1$ 。假设网络中节点类型只有易感节点 S 和染病节点 I 。其中, S 为易感者,表示处于健康状态但容易被感染的个体; I 为染病者,表示处于染病状态的个体; SS 、 SI 、 II 分别表示易感者与易感者、易感者与染病者、染病者与染病者构成的边; ABC 表示以状态 B 为中心的节点,其邻居的状态分别为 A 和 C , 并且 $A, B, C \in \{S, I\}$ 。

对于模型中的变量, $[S]$ 和 $[I]$ 表示易感节点和染病节点的数量; $[SS]$ 、 $[SI]$ 、 $[II]$ 分别表示二

元组 SS 、 SI 、 II 的数量; $[SSI]$ 和 $[ISI]$ 表示三元组 $S-S-I$ 和 $I-S-I$ 的数量; τ 为传染率; r 为恢复率; ω 为重连率。 $\omega[SI]$ 表示易感个体以 ω 的速率断开与染病者邻居的连接, 之后随机选择一个没有连边的易感个体重新建立连接。每个感染节点平均跟 $\frac{[II]}{[I]}$ 个感染节点相连, 这些节点构成的 II 边通过治疗被恢复为 SI 边的总数为

$$\begin{cases} [\dot{S}] = -\tau[SI] + r[I] + h(I), \\ [\dot{I}] = \tau[SI] - r[I] - h(I), \\ [\dot{SS}] = 2r[SI] - 2\tau[SSI] + 2\omega[SI] + 2h(I)\frac{[SI]}{[I]}, \\ [\dot{SI}] = -r[SI] + r[II] - \tau[SI] - \tau[ISI] + \tau[SSI] - \omega[SI] - h(I)\frac{[SI]}{[I]} + h(I)\frac{[II]}{[I]}, \\ [\dot{II}] = -2r[II] + 2\tau[SI] + 2\tau[ISI] - 2h(I)\frac{[II]}{[I]}. \end{cases} \quad (2)$$

假设网络中的度分布服从 Poisson 分布并且不考虑网络聚类, 使用 Keeling 等^[16]提出的三元组逼近来封闭系统

$$[SSI] = \frac{[SS][SI]}{[S]}, [ISI] = \frac{[SI][SI]}{[S]}. \quad (3)$$

由于网络中易感节点以速率 ω 断开与染病节点的连接后, 又会与其他易感节点建立新的连接。这种断键重连机制不会改变网络的总节点数 N 和总边数 nN 。因此, 以下平衡条件得以成立, 即

$$[S] + [I] = N, [SS] + 2[SI] + [II] = nN. \quad (4)$$

对系统(2)进行无量纲变换

$$s = \frac{[S]}{N}, i = \frac{[I]}{N}, P_{ss} = \frac{[SS]}{nN}, P_{si} = \frac{2[SI]}{nN}, P_{ii} = \frac{[II]}{nN}. \quad (5)$$

显然, 等式

$$s + i = 1, P_{ss} + P_{si} + P_{ii} = 1 \quad (6)$$

是成立的。

利用式(6)对系统(2)降维后, 模型转化为

$$\begin{cases} \dot{i} = \frac{1}{2}\tau n P_{si} - r i - \frac{\delta i}{1 + N\alpha i}, \\ \dot{P}_{si} = \frac{\tau n}{1-i} P_{si} (1 - P_{si} - P_{ii}) - \tau P_{si} \left(1 + \frac{n P_{si}}{2(1-i)} \right) - (r + \omega) P_{si} + 2r P_{ii} + \frac{\delta(-P_{si} + 2P_{ii})}{1 + N\alpha i}, \\ \dot{P}_{ii} = \tau P_{si} \left(1 + \frac{n P_{si}}{2(1-i)} \right) - 2r P_{ii} - \frac{2\delta P_{ii}}{1 + N\alpha i}. \end{cases} \quad (7)$$

$2h(I)\frac{[II]}{[I]} (h(I) = \frac{\delta[I]}{1 + \alpha[I]})$ 。同理, 每个感染节点平均跟 $\frac{[SI]}{[I]}$ 个易感节点相连, 并且这些节点构成的 SI 边通过治疗被恢复为 SS 边的总数为 $h(I)\frac{[SI]}{[I]}$ 。建立如下带有饱和治疗机制的自适应网络上的传染病模型

定义系统的参数空间为

$$\Lambda = \{(n, N, \tau, r, \omega, \delta, \alpha) | N > 2, n > 1, 0 < \tau < 1, 0 < r < 1, \omega > 0, \delta > 0, \alpha > 0\}.$$

并且

$$\Omega = \{(i, P_{si}, P_{ii}) | 0 \leq P_{si}, 0 \leq P_{ii}, 0 \leq i < 1, P_{si} + P_{ii} \leq 1\}$$

是系统(7)的正向不变集。本文将研究系统(7)在参数空间 Λ 与正向不变集 Ω 下的动力学行为。

2 系统动力学分析

2.1 无病平衡点与基本再生数

显然, $E_0 = (0, 0, 0)$ 是系统(7)的无病平衡点。

定义疾病的基本再生数为 $R_0 = \frac{\tau n}{r + \delta + \omega}$ 。

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 E_0 不稳定。

证明 系统(7)在 E_0 处线性化后的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -q & \frac{1}{2}\tau n & 0 \\ 0 & -\tau - d & 2q \\ 0 & \tau & -2q \end{bmatrix},$$

其中, $q = r + \delta > 0$, $d = r + \delta + \omega - \tau n$ 。

系统(7)在 E_0 处的特征方程为

$$F_0(\lambda) = (\lambda + q)(\lambda^2 + (2q + \tau + d)\lambda + 2qd). \quad (8)$$

显然, $\lambda_1 = -q$ 是矩阵的一个特征值, 矩阵其余两个特征值 λ_2 与 λ_3 满足

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -(2q + \tau + d), \lambda_2 \lambda_3 = 2qd. \quad (9)$$

当 $R_0 < 1$ 即 $d > 0$ 时, $\lambda_2 + \lambda_3 > 0, \lambda_2 \lambda_3 > 0$ 。此时 λ_2 与 λ_3 具有负实部, 无病平衡点 E_0 局部渐近稳定。当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_2 \lambda_3 = 2qd < 0$, 此时矩阵有一特征值非负, E_0 不稳定。

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \tau n P_{SI} - ri - \frac{\delta i}{1 + N\alpha i} = 0, \\ \frac{\tau n}{1-i} P_{SI} (1 - P_{SI} - P_{II}) - \tau P_{SI} \left(1 + \frac{n P_{SI}}{2(1-i)} \right) - (r + \omega) P_{SI} + 2r P_{II} + \frac{\delta(-P_{SI} + 2P_{II})}{1 + N\alpha i} = 0, \\ \tau P_{SI} \left(1 + \frac{n P_{SI}}{2(1-i)} \right) - 2r P_{II} - \frac{2\delta P_{II}}{1 + N\alpha i} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

计算方程组(10)第一个和第三个方程可得

$$P_{SI} = \frac{2i(N\alpha r i + r + \delta)}{\tau n(1 + N\alpha i)}, \quad (11)$$

$$P_{II} = \frac{(-N\alpha \tau + Nar)i^3 + (N\alpha \tau - \tau + r + \delta)i^2 + \tau i}{\tau n(1-i)(1 + N\alpha i)}. \quad (12)$$

将式(11)与式(12)代入方程组(10)的第二个方程, 得到 i 满足方程

$$f(i) = Ai^3 + Bi^2 + Ci + D = 0, \quad (13)$$

其中,

$$A = N\alpha(\omega - \tau),$$

$$B = N\alpha \tau n - N\alpha(2\omega - \tau) + (\omega - \tau),$$

$$C = (1 - N\alpha)\tau n + N\alpha(r + \omega) + (\tau - 2\omega),$$

$$D = r + \delta + \omega - \tau n = (1 - R_0)(r + \delta + \omega).$$

定理 2 A, B, C, D 与 R_0 的符号之间有如下关系成立:

1) 若 $R_0 \geq 1, A > 0$ 且 $C \geq 0$, 则 $D \leq 0$ 且 $B > 0$;

2) 若 $R_0 \geq 1$ 且 $A < 0$, 则 $B + C$ 恒大于 0;

3) 若 $A < 0$ 且 $B \neq 0$, 则 $B^2 - 3AC > 0$;

4) 若 $A = 0$, 则 $B > 0$ 。

证明 1) 当 $R_0 \geq 1$ 时, 显然 $D \leq 0$ 。

由 $A > 0, C \geq 0$ 与 $R_0 \geq 1$, 得

$$\begin{cases} \omega > \tau, \\ \tau - 2\omega \geq N\alpha \tau n - \tau n - Nar - N\alpha \omega, \\ \tau n - r - \omega \geq \delta. \end{cases}$$

将上面不等式组代入 B 的表达式, 整理可得

$$B = N\alpha \tau n + N\alpha(\tau - 2\omega) + (\omega - \tau) \geq$$

$$N\alpha \tau n + N\alpha[N\alpha(\tau n - r - \omega) - \tau n] + (\omega - \tau) \geq$$

$$N\alpha \tau n + N\alpha(N\alpha \delta - \tau n) + (\omega - \tau) =$$

$$N^2 \alpha^2 \delta + (\omega - \tau) > 0.$$

2) 当 $R_0 \geq 1$ 时, $B + C \geq N\alpha(\tau - \omega) + r +$

2.2 地方病平衡点

2.2.1 地方病平衡点的存在性

下面研究系统(7)的地方病平衡点。令系统(7)的右端等于零, 得

$$\delta + Nar > 0.$$

3) 当 $B \neq 0$ 时, 计算并化简 $B^2 - 3AC$, 得

$$\begin{aligned} B^2 - 3AC = & N^2 \alpha^2 [(n^2 - n + 1)\tau^2 - (n + 1)\omega\tau + \omega^2] + \\ & 3N^2 \alpha^2 r(\tau - \omega) + N\alpha(n\tau + \tau - 2\omega)(\tau - \omega) + \\ & (\tau - \omega)^2. \end{aligned}$$

将 $(n^2 - n + 1)\tau^2 - (n + 1)\omega\tau + \omega^2$ 看成关于 τ 的二次函数, 由于 $n^2 - n + 1$ 恒正, 故该函数开口向上。同时, 函数的判别式为 $-3\omega^2(n - 1)^2 < 0$ 。因此, $(n^2 - n + 1)\tau^2 - (n + 1)\omega\tau + \omega^2 > 0$ 恒成立, 故 $B^2 - 3AC > 0$ 。

4) 由 $A = 0$ 得

$$B = N\alpha \tau n - N\alpha \omega = N\alpha \tau n - N\alpha \tau = N\alpha \tau(n - 1) > 0.$$

接下来, 对方程(13)两边求导, 得

$$f'(i) = 3Ai^2 + 2Bi + C = 0. \quad (14)$$

当 $A \neq 0$, 记方程(14)的判别式为 $\Delta' = 4(B^2 - 3AC)$, 定义方程(14)的两个实根为 i_1^* 与 i_2^* 。

若 $A > 0$ 且 $\Delta' \geq 0$, 则 $i_1^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \leq \frac{-B + \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} = i_2^*$; 若

$A < 0$ 且 $\Delta' \geq 0$, 则 $i_1^* =$

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \leq \frac{-B - \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} =$$

i_2^* ; 若 $\Delta' < 0$ 方程(14)无实根。

定理 3 $f'(1)$ 与 $f(1)$ 都恒大于 0。若 $A > 0$ 且 $\Delta' \geq 0$, 则 $i_2^* < 1$; 若 $A < 0$ 且 $\Delta' \geq 0$, 则 $i_2^* > 1$ 。

证明 $f(1) = A + B + C + D = Nar + \delta + r > 0$, $f'(1) = 3A + 2B + C = Nar + \tau(n - 1)(N\alpha + 1) > 0$ 。

接下来, 若 $A > 0$ 且 $\Delta' \geq 0$ 时, 由 $f'(1) > 0$ 可知 $3A(3A + 2B + C) > 0$, 这与 $i_2^* =$

$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} < 1$ 等价。下面用反证法证明。

若 $A < 0$ 且 $\Delta' \geq 0$ 时, $i_2^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \leq 1$, 移项并平方消元可得 $3A(3A + 2B + C) \geq 0$, 即 $3A + 2B + C \leq 0$, 这与 $f'(1) > 0$ 矛盾。定理 3 得证。

当 $A \neq 0$ 时, 对方程(13)在 $(0, 1]$ 上的正根数目进行如下讨论:

1) $A > 0, R_0 \geq 1$ 。

a) 若 $C < 0$, 则 $\Delta' > 0$ 且 $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} < 0$ 。由于 $f'(0) = C < 0$, 由零点存在定理与定理 3 可知 $i_1^* < 0 < i_2^* < 1$ 。因此, 当 $0 < i < i_2^*$ 时, $f'(i) < 0$; 当 $i_2^* < i \leq 1$ 时, $f'(i) > 0$ 。故 $f(i)$ 在 $(0, i_2^*)$ 上单调递减, 在 $(i_2^*, 1]$ 上单调递增。又因为 $f(0) = D \leq 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上只有一个根。

b) 若 $C \geq 0$, 由定理 2 中的 1) 可知 $B > 0$ 。 $f''(i) = 6Ai + 2B$ 在 $(0, 1]$ 上恒大于零, 故 $f'(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。由于 $f'(0) = C \geq 0$, 因此 $f'(i) \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, 即 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。此时 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上根的数目取决于 R_0 的符号。考虑以下两种情形:

i) 当 $R_0 > 1$ 时, $f(0) < 0$, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上只有一个根。

ii) 当 $R_0 = 1$ 时, $f(0) = 0$, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上无根。

2) $A > 0, R_0 < 1$ 。

a) 若 $C < 0$, 则 $\Delta' > 0$ 且 $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} < 0$ 。由于 $f'(0) = C < 0$, 由零点存在定理与定理 3 可知, $i_1^* < 0 < i_2^* < 1$ 。因此, 当 $0 < i < i_2^*$ 时, $f'(i) < 0$; 当 $i_2^* < i \leq 1$ 时, $f'(i) > 0$ 。故 $f(i)$ 在 $(0, i_2^*)$ 上单调递减, 在 $(i_2^*, 1]$ 上单调递增。又因为 $f(0) = D > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上正根情况由 $f(i_2^*)$ 的正负决定: 当 $f(i_2^*) > 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上没有根; 当 $f(i_2^*) = 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有一对正二重根; 当 $f(i_2^*) < 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有 2 个互异实根。

b) 若 $B \geq 0$ 且 $C \geq 0$, 则 $f''(i) = 6Ai + 2B$ 在 $(0, 1]$ 上恒大于 0, 故 $f'(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。由于 $f'(0) = C \geq 0$, 因此 $f'(i) \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, 即 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。又因为 $f(0) =$

$D > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上无根。

c) 若 $B < 0$ 且 $C > 0$, 此时 Δ' 正负不定, 考虑以下两种情形:

i) 当 $\Delta' > 0$ 时, $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} > 0$ 且 $i_1^* + i_2^* = \frac{-2B}{3A}$ 。由定理 3 可知 $0 < i_1^* < i_2^* < 1$, 并且 $f'(0) = C > 0$ 。因此, 当 $0 < i < i_1^*$ 时, $f'(i) > 0$; 当 $i_1^* < i < i_2^*$ 时, $f'(i) < 0$; 当 $i_2^* < i \leq 1$ 时, $f'(i) > 0$ 。故 $f(i)$ 在 $(0, i_1^*)$ 上单调递增, 在 (i_1^*, i_2^*) 上单调递减, 在 $(i_2^*, 1]$ 上单调递增。由于 $f(i_1^*) > f(0) = D > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上正根情况由 $f(i_2^*)$ 的正负决定: 当 $f(i_2^*) > 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上没有根; 当 $f(i_2^*) = 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有一对正二重根; 当 $f(i_2^*) < 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有 2 个互异实根。

ii) 当 $\Delta' \leq 0$ 时, 在 $(0, 1]$ 上 $f'(i) > 0$ 恒成立, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。由于 $f(0) > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上无根。

d) 若 $B < 0$ 且 $C = 0$, 则 $\Delta' > 0$, $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} = 0$ 且 $i_1^* + i_2^* = \frac{-2B}{3A} > 0$ 。此时, $0 = i_1^* < i_2^* < 1$, $f'(0) = 0$ 。因此, 当 $0 = i_1^* < i < i_2^*$ 时, $f'(i) < 0$; 当 $i_2^* < i \leq 1$ 时, $f'(i) > 0$ 。故 $f(i)$ 在 $(0, i_2^*)$ 单调递减, 在 $(i_2^*, 1]$ 上单调递增。由于 $f(0) = f(i_1^*) = D > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上正根情况由 $f(i_2^*) = \frac{27A^2D + 4B^3}{27A^2}$ 的正负决定: 当 $f(i_2^*) > 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上没有根; 当 $f(i_2^*) = 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有一对正二重根; 当 $f(i_2^*) < 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有 2 个互异实根。

3) $A < 0, R_0 \geq 1$ 。

a) 若 $C > 0$ 或 $C = 0$ 且 $B > 0$ (由定理 2 中的 2) 得到) 时, $\Delta' \geq 0$, $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} \leq 0$, $i_1^* \leq 0 < 1 < i_2^*$ 。由于 $f'(0) = C \geq 0$, 因此 $f'(i) \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, 即 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。此时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上根的数目取决于 $f(0)$ 的符号, 即与 R_0 的符号有关。考虑以下两种情形:

i) 当 $R_0 > 1$ 时, $f(0) < 0$, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上只有一个根。

ii) 当 $R_0 = 1$ 时, $f(0) = 0$, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上无根。

b) 若 $C < 0$, 由定理 2 中的 2) 可知 $B > 0$ 。再由

定理 2 中的 3) 得, $\Delta' = 4(B^2 - 3AC) > 0$, $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} > 0$ 且 $i_1^* + i_2^* = \frac{-2B}{3A} > 0$ 。由零点存在定理与定理 3 可知, $0 < i_1^* < 1 < i_2^*$ 。由于 $f'(0) < 0$, 因此, 当 $0 < i < i_1^*$ 时, $f'(i) < 0$; 当 $i_1^* < i \leq 1$ 时, $f'(i) > 0$ 。故 $f(i)$ 在 $(0, i_1^*)$ 上单调递减, 在 $(i_1^*, 1]$ 上单调递增。由于 $f(0) = D \leq 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上只有一个根。

4) $A < 0, R_0 < 1$ 。

a) 若 $C > 0$ 或 $C = 0$ 且 $B > 0$ (由定理 2 中的 2) 得到) 时, 则 $\Delta' \geq 0$, $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} \leq 0$ 且 $i_1^* \leq 0 < 1 < i_2^*$ 。由于 $f'(0) = C \geq 0$, 因此, $f'(i) \geq 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, 即 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。又因为 $f(0) = D > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上无根。

b) 若 $C < 0$, 由定理 2 中的 2) 可知 $B > 0$ 。再由定理 2 中的 3) 可得, $\Delta' = 4(B^2 - 3AC) > 0$, $i_1^* \cdot i_2^* = \frac{C}{3A} > 0$ 且 $i_1^* + i_2^* = \frac{-2B}{3A} > 0$ 。由零点存在定理与定理 3 可知 $0 < i_1^* < 1 < i_2^*$ 。由于 $f'(0) = C < 0$, 因此, 当 $0 < i < i_1^*$ 时, $f'(i) < 0$; 当 $i_1^* < i \leq 1$ 时, $f'(i) > 0$ 。故 $f(i)$ 在 $(0, i_1^*)$ 上单调递减, 在 $(i_1^*, 1]$ 上单调递增。由于 $f(0) = D > 0$, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上只有一个根, 故 $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上正根的情况由 $f(i_1^*)$ 的正负决定: 当 $f(i_1^*) > 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上没有根; 当 $f(i_1^*) = 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有一对正二重根; 当 $f(i_1^*) < 0$ 时, $f(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有 2 个互异实根。

当 $A = 0$ 时, $g(i) \triangleq f(i) = Bi^2 + Ci + D = 0$ 。由定理 2 中的 4) 可知此时 $B > 0$ 恒成立。再记方程 $g(i)$ 的判别式为 $\Delta'' = C^2 - 4BD$, 并定义 $g(i)$ 的两个实根为 i_1^{**} 与 i_2^{**} 。因此, 若 $\Delta'' \geq 0$, 则 $i_1^{**} = \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4BD}}{2B} \leq \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4BD}}{2B} = i_2^{**}$; 若 $\Delta'' < 0$, 则 $g(i)$ 无实根。

定理 4 当 $A = 0$ 时, $g(1)$ 恒大于 0。若 $A = 0$ 且 $\Delta'' \geq 0$, 则 $i_2^{**} < 1$ 。

证明: $A = 0$ 时, $g(1) = B + C + D = Nar + \delta + r > 0$ 。若 $A = 0$ 且 $\Delta' \geq 0$ 时, 由 $g(1) > 0$ 可知, $4B(B + C + D) > 0$, 这与 $i_2^{**} = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4BD}}{2B} < 1$ 等价。定理 4 得证。

当 $A = 0$ 时, 对 $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上的正根数目进行如下讨论:

1) $A = 0, R_0 > 1$: 此时 $\Delta'' \geq 0$ 且 $i_1^{**} \cdot i_2^{**} = \frac{D}{B} < 0$ 。由定理 4 可知, $i_1^{**} < 0 < i_2^{**} < 1$ 。故 $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上只有一个根 i_2^{**} 。

2) $A = 0, R_0 < 1$: 此时 Δ'' 的符号不定。对 $g(i)$ 进行求导可得, $g'(i) = 2Bi + C$, 再考虑如下两种情形:

a) 若 $C \geq 0$, 则 $g'(i) > 0$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, 即 $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增。由于 $g(0) = D > 0$, 故 $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上无根。

b) 若 $C < 0$, 则 $g'(0) = C < 0, g'(1) > 0$ 。故在 $(0, 1]$ 上存在一点 $\tilde{i} = \frac{-C}{2B}$ 使得 $g'(\tilde{i}) = 0$ 。因此, 当 $0 < i < \tilde{i}$ 时, $g'(i) < 0$; 当 $\tilde{i} < i \leq 1$ 时, $g'(i) > 0$ 。即 $g(i)$ 在 $(0, \tilde{i})$ 单调递减, 在 $(\tilde{i}, 1]$ 单调递增。由于 $g(0) = D > 0$, 故 $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上根的情况由 $g(\tilde{i})$ 的符号决定: 当 $g(\tilde{i}) > 0$ 时, $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上没有根; 当 $g(\tilde{i}) = 0$ 时, $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有一对正二重根 $i_1^{**}(i_2^{**})$; 当 $g(\tilde{i}) < 0$ 时, $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有 2 个互异实根 i_1^{**} 与 i_2^{**} , 其中 $g(\tilde{i}) = \frac{4BD - C^2}{4B}$ 。

3) $A = 0, R_0 = 1$: $g(i) = Bi^2 + Ci = i(Bi + C) = 0$

显然, 当 $C \geq 0$ 时, $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上没有根; 当 $C < 0$ 时, 由定理 4 可知 $g(i)$ 在 $(0, 1]$ 上有一个根 i_2^{**} 。

定理 5 对于系统 (7), 无病平衡点是始终存在的。地方病平衡点的分布见表 1。

由定理 5 可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 系统有唯一的正平衡点; 当 $R_0 < 1$ 时, 系统有多个正平衡点共存的情况。

2.2.2 地方病平衡点的稳定性

系统 (7) 在地方病平衡点 $\hat{E} = (\hat{i}, \hat{P}_{st}, \hat{P}_{il})$ 处线性化对应的 Jacobian 矩阵为

$$J(\hat{E}) = \begin{bmatrix} J_{11} & \frac{1}{2}\tau n & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

其中, $J_{11} = -r - \frac{\delta}{(1 + Na\hat{i})^2}$,

$$J_{21} = \frac{2N^2\alpha^2 r \omega \hat{i}^2 + 2r\delta\hat{i}(N^2\alpha^2\hat{i}^2 + 4Na\hat{i} + Na + 2)}{\tau n(Na\hat{i} + 1)^3(1 - \hat{i})} + \frac{2\delta\omega\hat{i}}{\tau n(Na\hat{i} + 1)(1 - \hat{i})} + \frac{2\tau\delta\hat{i}(3Na\hat{i} + Na + 2)}{\tau n(Na\hat{i} + 1)^3(1 - \hat{i})} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2N^2\alpha^2(6r^2\hat{i}^4+r\delta\hat{i}^3+\delta\omega\hat{i}^4+\tau\delta\hat{i}^2-6)}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)^3(1-\hat{i})^2} + \\
& \frac{2\delta^2\hat{i}(N\alpha+1)}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)^3(1-\hat{i})^2} + \frac{2r\omega\hat{i}}{\tau n(1-\hat{i})} - \\
& \frac{2r^2i(2i-1)}{\tau n(1-\hat{i})^2}, \\
J_{22} &= \frac{\delta(2\hat{i}-1)^2}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)(1-\hat{i})} + \frac{r(2\hat{i}-1)^2}{\tau n(1-\hat{i})} - \\
& \frac{\omega(1-\hat{i})-1}{\tau n} - \frac{1}{n}, \\
J_{23} &= \frac{2\delta(1-2\hat{i})}{(N\alpha\hat{i}+1)(1-\hat{i})} + \frac{2r(1-2\hat{i})}{(1-\hat{i})}, \\
J_{31} &= -\frac{\hat{i}^2(r+\delta)^2-N\alpha\tau\delta\hat{i}}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)^3(1-\hat{i})^2} + \\
& \frac{2r^2\hat{i}^2(N\alpha\hat{i}+1)^2+2\delta^2\hat{i}^2}{\tau n(1-\hat{i})^2} + \frac{2N\alpha\delta^2\hat{i}^2}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)^3(1-\hat{i})} + \\
& \frac{2N\alpha r\delta\hat{i}^2}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)^2(1-\hat{i})} + \frac{2N\alpha\tau\delta\hat{i}}{\tau n(N\alpha\hat{i}+1)^2} + \\
& \frac{4r\delta\hat{i}^2(N\alpha\hat{i}+1)}{\tau n(1-\hat{i})^2}, \\
J_{32} &= \tau + \frac{2r\hat{i}}{1-\hat{i}} + \frac{2\delta(1-2\hat{i})}{(1+N\alpha\hat{i})(1-\hat{i})}, \\
J_{33} &= -2r - \frac{2\delta}{N\alpha\hat{i}+1}.
\end{aligned}$$

表 1 正平衡点的分布表

Tab. 1 Distribution of the endemic equilibria

A 与 R_0 的条件	其他条件	系统(7)正平衡点的分布
$A > 0, R_0 > 1$	$C < 0$	一个正平衡点
	$B > 0, C \geq 0$	一个正平衡点
$A > 0, R_0 < 1$	$B \geq 0, C \geq 0$	无正平衡点
	$B < 0, C > 0, \Delta' \leq 0$	无正平衡点
	$B < 0, C > 0, \Delta' > 0, f(i_2^*) > 0$	无正平衡点
	$B < 0, C > 0, \Delta' > 0, f(i_2^*) = 0$	一对正二重平衡点
	$B < 0, C > 0, \Delta' > 0, f(i_2^*) < 0$	两个互异正平衡点
	$C < 0, f(i_2^*) > 0$	无正平衡点
	$C < 0, f(i_2^*) = 0$	一对正二重平衡点
	$C < 0, f(i_2^*) < 0$	两个互异正平衡点
	$B < 0, C = 0, f(i_2^*) > 0$	无正平衡点
	$B < 0, C = 0, f(i_2^*) = 0$	一对正二重平衡点
	$B < 0, C = 0, f(i_2^*) < 0$	两个互异正平衡点
$A > 0, R_0 = 1$	$C < 0$	一个正平衡点
	$B > 0, C \geq 0$	无正平衡点
$A < 0, R_0 > 1$	$B > 0, C < 0$	一个正平衡点
	$C > 0$	一个正平衡点
	$B > 0, C = 0$	一个正平衡点
$A < 0, R_0 < 1$	$C > 0$	无正平衡点
	$B > 0, C = 0$	无正平衡点
	$B > 0, C < 0, f(i_1^*) > 0$	无正平衡点
	$B > 0, C < 0, f(i_1^*) = 0$	一对正二重平衡点
	$B > 0, C < 0, f(i_1^*) < 0$	两个互异正平衡点
$A < 0, R_0 = 1$	$B > 0, C < 0$	一个正平衡点
	$C \geq 0$	无正平衡点
$A = 0, R_0 > 1$	$C \geq 0$	一个正平衡点
	$C < 0, g(\tilde{i}) > 0$	无正平衡点
	$C < 0, g(\tilde{i}) = 0$	一对正二重平衡点
	$C < 0, g(\tilde{i}) < 0$	两个互异正平衡点
$A = 0, R_0 = 1$	$C \geq 0$	无正平衡点
	$C < 0$	一个正平衡点

矩阵(15)所满足的特征方程为

$$\lambda^3 + a_2(\hat{i})\lambda^2 + a_1(\hat{i})\lambda + a_0(\hat{i}) = 0. \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned}
a_2(\hat{i}) &= \omega + \frac{r(2-\hat{i})^2}{(1-\hat{i})^2} + \frac{N\alpha\delta\hat{i}(3-2\hat{i})}{(1+N\alpha\hat{i})^2(1-\hat{i})^2} + \\
& \frac{\delta(2-\hat{i})^2}{(1+N\alpha\hat{i})^2(1-\hat{i})^2} - \frac{\tau(n-\hat{i})}{1-\hat{i}}, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$a_1(\hat{i}) = \frac{N^2 \alpha^2 r \delta \hat{i}^2 (-\hat{i}^3 - 5\hat{i}^2 + 2\hat{i} + 6) + \delta^2 (-\hat{i}^3 - 3\hat{i} + 5) + r \delta (-2\hat{i}^3 - 6\hat{i} + 10)}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^3} + \frac{3N\alpha r^2 \hat{i}^4 + 2N^3 \alpha^3 r^2 \hat{i}^4}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^3} +$$

$$\frac{N\alpha \delta^2 \hat{i} (-5\hat{i}^2 + 5\hat{i} + 1) + N\alpha r \delta \hat{i} (-3\hat{i}^3 - 5\hat{i}^2 - 4\hat{i} + 16)}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^3} + \frac{2N\hat{a}\hat{i} + 3}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^2} + 3r\omega + \frac{r^2 (-\hat{i}^3 - 3\hat{i} + 5)}{(1 - \hat{i})^3} +$$

$$\frac{N^2 \alpha^2 \tau \delta \hat{i}^3 (4 - 3\hat{i}) + N\alpha \tau \delta \hat{i}^2 (9 - 7\hat{i}) + \tau \delta \hat{i} (5 - 4\hat{i})}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^2} + \frac{r\tau \hat{i} (5 - 4\hat{i})}{(1 - \hat{i})^2} - \frac{r\tau n (3 - 2\hat{i})}{(1 - \hat{i})^2} - \frac{3N^3 \alpha^3 r \omega \hat{i}^5}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^3} -$$

$$\frac{N^2 \alpha^2 \delta \tau n \hat{i}^2 (2 - \hat{i}) + N\alpha \delta \tau n \hat{i} (5 - 3\hat{i}) + \delta \tau n (3 - 2\hat{i})}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^2}, \quad (18)$$

$$a_0(\hat{i}) = 2r^2 \omega + \frac{2r^2 \tau \hat{i} (2 - \hat{i})}{(1 - \hat{i})^2} + \frac{2r^3 (1 + \hat{i})}{(1 - \hat{i})^3} + \frac{2r\tau \delta \hat{i} (N\hat{a}\hat{i} + 2)(3 - \hat{i})}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^2 (1 - \hat{i})^2} + \frac{2r\delta \omega (N\hat{a}\hat{i} + 2)}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^2} +$$

$$\frac{6\delta^2 r}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^4 (1 - \hat{i})^2} + \frac{2r^2 \delta (N\hat{a}\hat{i} + 3)(1 + \hat{i}) + 8N\alpha r^2 \delta \hat{i}^2}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^2 (1 - \hat{i})^3} +$$

$$\frac{2N\alpha r^3 \hat{i}^3 + 6N\alpha \delta^3 \hat{i}^2 + 12\delta^2 \omega \hat{i} + 4N\alpha \delta^2 r \hat{i} + 2\delta^3 (1 + \hat{i})}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^4 (1 - \hat{i})^3} + \frac{2\delta^2 \tau \hat{i} (N\hat{a}\hat{i} + 2)}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^2} + \frac{2\delta^2 \omega}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3} +$$

$$\frac{14N^2 \alpha^2 \delta^2 r \hat{i}^3 + 20N\alpha \delta^2 r \hat{i}^2 + 12N^3 \alpha^3 r \delta \omega \hat{i}^4}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^4 (1 - \hat{i})^3} - \frac{4N^3 \alpha^3 r^3 \hat{i}^3}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^4 (1 - \hat{i})^2} -$$

$$\frac{5N^4 \alpha^4 r^2 \tau \hat{i}^7 + 8r\delta \omega \hat{i}^2 + 6N\alpha \delta^2 \omega \hat{i} + 2N^2 \alpha^2 \delta^2 r \hat{i}^2 + 2N\alpha \delta^3 \hat{i} + 8N^3 \alpha^3 r^2 \tau \hat{i}^5}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^4 (1 - \hat{i})^3} - \frac{2r^2 \tau n}{(1 - \hat{i})^2} -$$

$$\frac{2\delta^2 \tau n (N\hat{a}\hat{i}^2 + 1) + 2\delta^2 \tau \hat{i}^2}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^3 (1 - \hat{i})^2} - \frac{4r\tau \delta \hat{i} + 2r\delta \tau n (N\hat{a}\hat{i}^2 + N\hat{a}\hat{i} + 2)}{(N\hat{a}\hat{i} + 1)^2 (1 - \hat{i})^2}. \quad (19)$$

由 Routh-Hurwitz 判据, 如下定理成立:

定理 6 地方病平衡点 $\hat{E} = (\hat{i}, \hat{P}_{SI}, \hat{P}_{II})$ 局部渐近稳定当且仅当

$$a_2(\hat{i}) > 0, a_0(\hat{i}) > 0, a_1(\hat{i})a_2(\hat{i}) - a_0(\hat{i}) > 0. \quad (20)$$

3 分支分析

下面将给出系统(7)发生后向分支与 Hopf 分

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{1}{2} \tau n \theta_2 - r \theta_1 - \frac{\delta \theta_1}{1 + N\alpha \theta_1}, \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\tau n \theta_2 (1 - \theta_2 - \theta_3)}{1 - \theta_1} - \tau \theta_2 \left(1 + \frac{n \theta_2}{2(1 - \theta_1)} \right) - (r + \omega) \theta_2 + 2r \theta_3 + \frac{\delta (-\theta_2 + 2\theta_3)}{1 + N\alpha \theta_1}, \\ \dot{\theta}_3 = \tau \theta_2 \left(1 + \frac{n \theta_2}{2(1 - \theta_1)} \right) - 2r \theta_3 - \frac{2\delta \theta_3}{1 + N\alpha \theta_1}. \end{cases} \quad (21)$$

令 $\sigma = \tau - \tilde{\tau}$, $\tilde{\tau} = \frac{r + \delta + \omega}{n}$ 。当 $R_0 = 1$ 时, $\tau = \frac{r + \delta + \omega}{n}$ 。

故系统(21)在无病平衡点处对应的 Jacobian 矩阵为

$$J(0, 0, 0) =$$

支的条件。

3.1 后向分支

由表 1 可以看出, 系统(7)在 $R_0 < 1$ 时存在两个正平衡点, 这表明系统可能会发生后向分支。本节将给出系统(7)后向分支的存在条件。

首先, 记 $\vec{\theta}(t) = (i, P_{SI}, P_{II})$, 则系统(7)化为

$$\begin{bmatrix} -(r + \delta) & \frac{r + \delta + \omega}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{r + \delta + \omega}{n} & 2(r + \delta) \\ 0 & \frac{r + \delta + \omega}{n} & -2(r + \delta) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

显然, 0 是矩阵(22)的一个特征值, 并且 0 对

应的右特征向量 ξ 和左特征向量 η 分别为

$$\xi = \left(\frac{(r+\delta+\omega)n}{2}, (r+\delta)n, \frac{r+\delta+\omega}{2} \right)^T,$$

$$\eta = \left(0, \frac{1}{n(r+\delta)(r+\delta+\omega)}, \frac{1}{n(r+\delta)(r+\delta+\omega)} \right)^0.$$

进一步, 将系统(21)表示为 $\dot{\theta}(t)=F(\theta(t), \sigma)$ 。其中,

$$\begin{cases} F(\theta_1(t), \sigma) = \frac{1}{2}(\sigma + \tilde{\tau})n\theta_2 - r\theta_1 - \frac{\delta\theta_1}{1+N\alpha\theta_1}, \\ F(\theta_2(t), \sigma) = \frac{(\sigma + \tilde{\tau})n\theta_2(1-\theta_2-\theta_3)}{1-\theta_1} - (r+\omega)\theta_2 + 2r\theta_3 + (\sigma + \tilde{\tau})\theta_2(1 + \frac{n\theta_2}{2(1-\theta_1)}) + \frac{\delta(-\theta_2+2\theta_3)}{1+N\alpha\theta_1}, \\ F(\theta_3(t), \sigma) = (\sigma + \tilde{\tau})\theta_2(1 + \frac{n\theta_2}{2(1-\theta_1)}) - 2r\theta_3 - \frac{2\delta\theta_3}{1+N\alpha\theta_1}. \end{cases}$$

由文献[17]中后向分支的计算方法与理论可得

$$a_0 := \sum_{k,i,j=1}^3 \eta_k \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 F_K}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (0, 0, 0, 0) =$$

$$-(n+1)(r+\delta) + (n-1)\omega + Nn\delta\alpha,$$

$$b_0 := \sum_{k,i=1}^3 \eta_k \xi_i \frac{\partial^2 F_K}{\partial \theta_i \partial \sigma} (0, 0, 0, 0) = \frac{n}{r+\delta+\omega}.$$

显然 $b_0 > 0$, 因此得到如下定理:

定理 7 当 $a_0 > 0$ 时, 系统(7)的无病平衡点在 $R_0 = 1$ 处发生后向分支; 当 $a_0 < 0$ 时, 系统(7)的无病平衡点在 $R_0 = 1$ 处发生前向分支。

3.2 Hopf分支

根据文献[18]中Hopf分支验证方法, 可得定理8成立。

定理 8 系统(7)在地方病平衡点 $\hat{E} = (\hat{i}, \hat{P}_{SI}, \hat{P}_H)$ 处发生Hopf分支, 当且仅当 $a_2(\hat{i})a_1(\hat{i}) - a_0(\hat{i}) = 0$, $a_1(\hat{i}) > 0$ 。

4 数值模拟

本节将研究 ω 、 δ 与 α 对变量 i 、 P_{SI} 与 P_H 的影响。以下模拟都取初值 $\theta_1(0) = (i(0), P_{SI}(0), P_H(0)) = (0.8, 0.4, 0.4)$, 参数 $n=6$, $r=0.006$, $\tau=0.006$ 与 $N=1\ 000$ 。首先, 取 $\delta=0.008$, $\alpha=0.05$, ω 分别取0.2 ($R_0 \approx 0.17$)、0.02 ($R_0 \approx 1.06$)与0.002 ($R_0 \approx 2.25$)。显然, 随着重连率 ω 的减小, 基本再生数 R_0 会增大。从图1(a)与图1(c)可以看出, 随着 ω 的增大, i 与 P_H 的值会减小。因此, 当疾病暴发时, 个体可以减少与患病人群的接触来抑制疾病的传播。

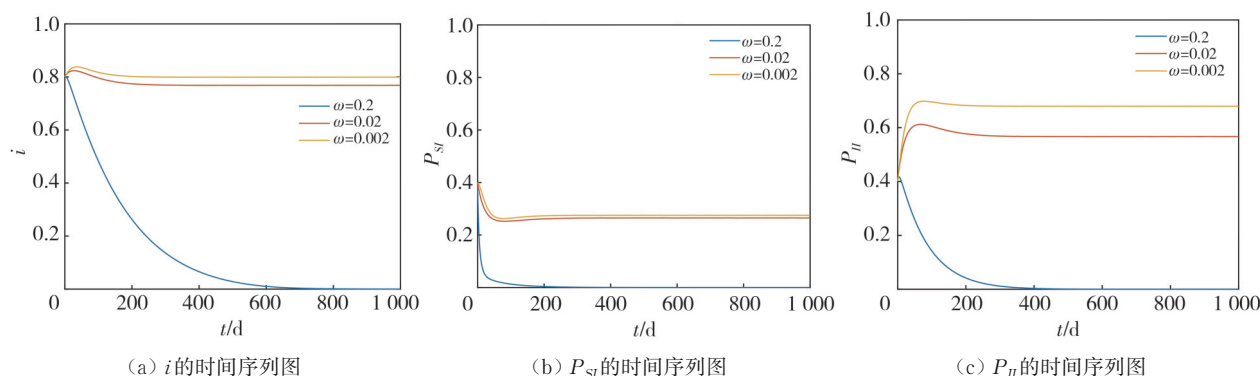


图1 不同 ω 下 i 、 P_{SI} 与 P_H 的时间序列图

Fig. 1 Time series plot of i , P_{SI} and P_H with different ω

接下来, 取 $\omega=0.008$, $\alpha=0.005$, δ 分别取0.2 ($R_0 \approx 0.17$)、0.02 ($R_0 \approx 1.06$)与0.002 ($R_0 \approx 2.25$)。显然, 随着治愈率 δ 的减小, 基本再生数 R_0 也会增大。由图2(a)与图2(c)可以看出, 随着 δ 的增大, i 与 P_H 的值会减小。因此, 提高治愈

率能够有效预防感染。最后, 取 $\omega=0.008$, $\delta=0.2$, α 分别取0.2、0.02与0.002, 对应 R_0 的值都约为0.17, 由图3(a)与图3(c)可以看出, 随着治疗延误的影响程度 α 的增大, i 与 P_H 的值会增大。虽然 α 与 R_0 无关, 但由于系统存在后向分

支,故 α 会影响疾病的消亡。因此,病人治疗被延误时也会引起疾病的暴发。

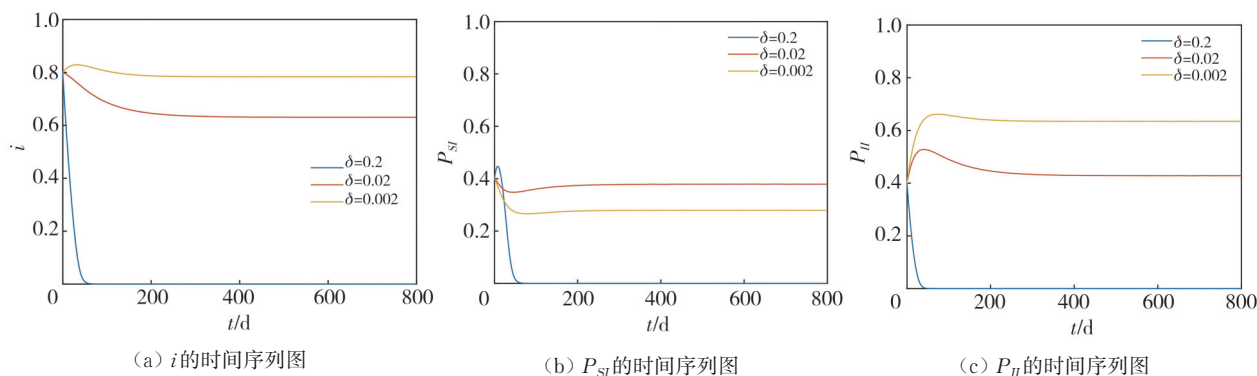


图 2 不同 δ 下 i 、 P_{SI} 与 P_{II} 的时间序列图

Fig. 2 Time series plot of i , P_{SI} and P_{II} with different δ

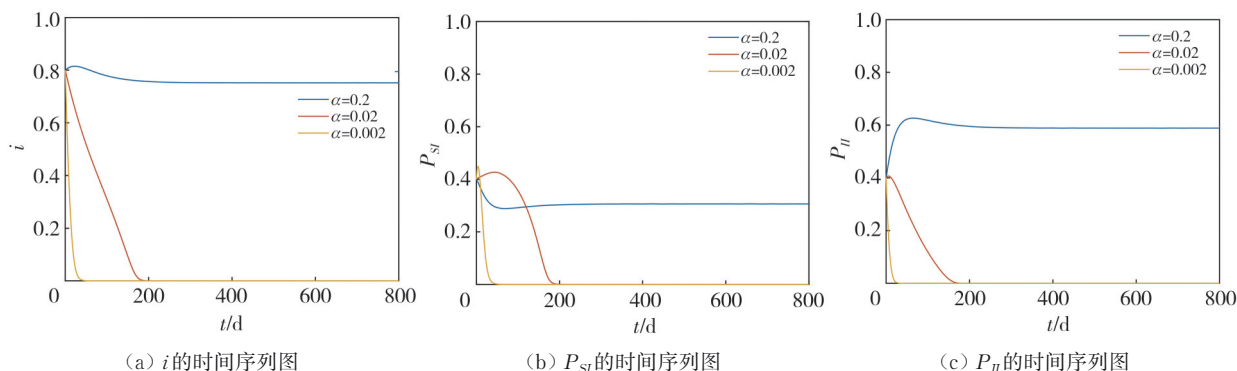


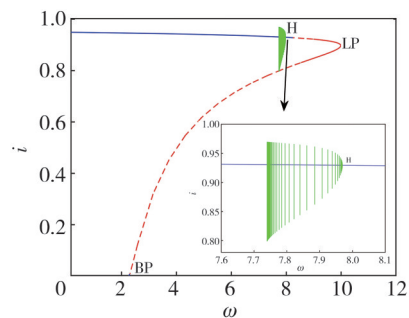
图 3 不同 α 下 i 、 P_{SI} 与 P_{II} 的时间序列图

Fig. 3 Time series plot of i , P_{SI} and P_{II} with different α

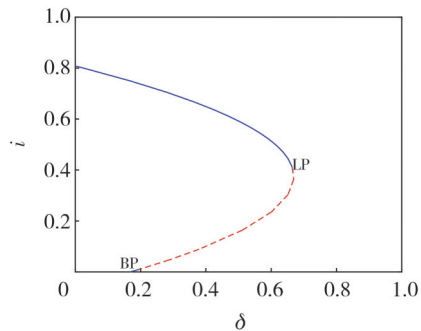
下面将绘制 ω 、 δ 、 α 、 R_0 和 a_0 与易感个体密度 i 之间的关系图以说明系统(7)存在后向分支、鞍结点分支与Hopf分支。以下模拟都取参数 $n=5$ 与 $N=500$ 。

图 4(a) 对应的初值与另外的参数值为 $\theta_2(0)=(0.7, 0.1, 0.5)$, $r=0.1$, $\alpha=0.2$, $\tau=0.49$, $\delta=0.1$ 。当 $\omega=9.989$ 时(对应表 1 中的值 $A=949.9$, $B\approx-1694$, $C\approx747$, $R_0\approx0.24$, $\Delta'\approx2.97\times10^6$, $f(i_2^*)=0$), 系统会出现鞍结点(LP点), 并且在这点处有一对不稳定平衡点(2重)。通过减小 ω 的值可以观察到系统存在两个不稳定平衡点。当 ω 的值减小到7.969时(对应表 1 中的值 $A=747.9$, $B\approx-1292$, $C\approx549$, $R_0\approx0.30$, $\Delta'\approx1.75\times10^6$, $f(i_2^*)\approx-2.4$), 系统出现了Hopf分支点(H点), 并且过H点会出现一个不稳定极限环。继续减小 ω 的值, 系统出现稳定地方病平衡点和稳定零平衡点共存的现象, 称为双稳现象。当 ω 的值减小到2.25时(对应表 1 中的值 $A=176$, $C\approx-12$, $R_0=1$), 系统出现跨临界分支点(BP点)。在BP点之前, 系统只出现一个稳定的地方病平衡点与

一个不稳定的零平衡点。



(a) ω 与 i 的分支图



(b) δ 与 i 的分支图

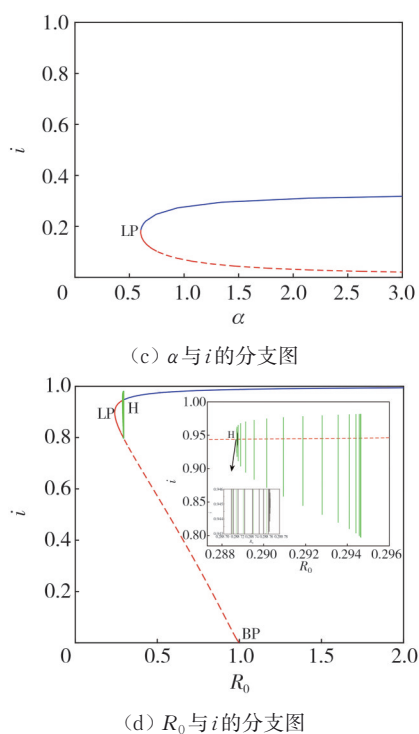
图4 i 与参数之间的分支图Fig. 4 Bifurcation diagrams between i and parameters

图4(b)对应的初值与另外的参数值为 $\theta_3(0)=(0.7, 0.1, 0.15)$, $r=0.04$, $\alpha=0.034$, $\tau=0.052$, $\omega=0.05$ 。当 $\delta=0.667$ 时(对应表1中的值 $A=-0.034$, $B\approx 3.6$, $C\approx -2.7$, $R_0\approx 0.34$, $f(i_1^*)=0$), 系统会出现鞍结点(LP点), 在这点有一对不稳定平衡点(2重)。继续减小 δ 的值, 系统会出现双稳现象。当 δ 的值减小到0.17时(对应表1中的值 $A=-0.034$, $B\approx 3.6$, $C\approx -2.7$, $R_0=1$), 系统出现跨临界分支点(BP点)。在BP点之前系统只出现一个稳定的地方病平衡点与一个不稳定的零平衡点。图4(a)与图4(b)开口向左是因为 R_0 随 ω 或 δ 的增大而减小。

图4(c)对应的初值与另外的参数值为 $\theta_4(0)=(0.6, 0.2, 0.4)$, $r=0.04$, $\delta=0.3$, $\tau=0.02$, $\omega=0.05$ 。当 $\alpha=0.603$ 时(对应表1中的值 $A=9.045$, $C=-2.995$, $R_0\approx 0.26$, $f(i_2^*)=0$), 系统会出现鞍结点(LP点), 在这点有一对不稳定平衡点(2重)。继续增大 α 的值, 系统会一直出现双稳现象。

图4(d)对应的初值与另外的参数值为 $\theta_2(0)=(0.7, 0.1, 0.5)$, $r=0.1$, $\alpha=0.2$, $\delta=0.1$, $\omega=10$ 。

当 $R_0=0.24$ 时(对应表1中的值 $A\approx 951$, $C\approx 748$ 且 $B\approx -1696.7$, $\Delta'\approx 3\times 10^6$, $f(i_2^*)=0$),

系统会出现鞍结点(LP点), 在这点有一对不稳定平衡点(2重)。此时增大 R_0 的值可以观察到系统存在两个不稳定平衡点。当 R_0 的值继续增大到0.289时(对应表1中的值 $A\approx 941$, $B\approx -1636.9$, $C\approx 699$, $\Delta'\approx 2.82\times 10^6$, $f(i_2^*)\approx -4.13$), 系统出现了Hopf分支点(H点), 并且过H点系统出现一个稳定极限环与一个不稳定极限环(不稳定极限环在稳定极限环外面), 这也可通过图5来说明。继续增大 R_0 的值, 系统出现双稳现象。当 R_0 的值增大到1时(对应表1中的值 $C=-17.76$ 且 $A=796$), 系统出现跨临界分支点(BP点)。在BP点之后, 系统只出现一个稳定的地方病平衡点与一个不稳定的零平衡点。模拟结果表明: 在图4(a)中H点的第一李雅普诺夫系数^[11]为1.2567490 >0 , 故它在该点处发生亚临界Hopf分支; 而在图4(d)中H点的第一李雅普诺夫系数为-0.92629418 <0 , 故它在该点处发生超临界Hopf分支^[19]。

在图4(a)、图4(b)、图4(c)中, 蓝色实线(红色虚线)代表稳定(不稳定)平衡点, 绿色竖线代表不稳定周期解的振幅。在图4(d)中, 黑色(绿色)竖线代表不稳定(稳定)周期解的振幅。

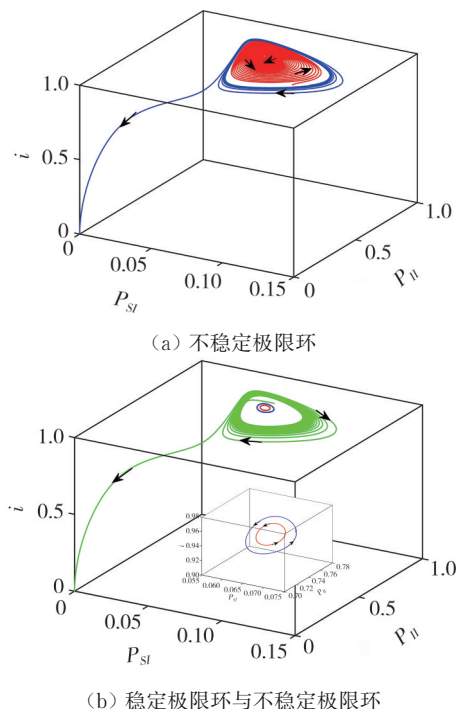
图4中LP点表示鞍结点(Limit Point), BP点表示跨临界分支点(Transcritical Point), H点表示Hopf分支点(Hopf Bifurcation Point)。图4(a)、图4(d)中小图是将大图H点放大的结果。

最后通过绘制相位图分析系统(7)在H点附近的动力学行为。以下模拟都取参数 $n=5$, $r=0.1$, $\alpha=0.2$, $N=500$, $\omega=10$ 与 $\delta=0.1$ 。

首先, 取初值 $\theta_5(0)=(0.92, 0.108, 0.565)$, 并且取 $\theta_6(0)=(0.91, 0.10, 0.56)$, 并在H点附近取参数 τ 的值为0.5919。初始值为 $\theta_5(0)$ 的蓝色轨道向外盘旋趋于无病平衡点, 而初始值为 $\theta_6(0)$ 的红色轨道会向内盘旋趋于稳定的地方病平衡点。因此, 在红色轨道与蓝色轨道之间存在一个不稳定极限环。相位图如5(a)所示。

接着, 取初值 $\theta_7(0)=(0.9469, 0.0686, 0.7444)$, $\theta_8(0)=(0.95, 0.07, 0.75)$ 与 $\theta_9(0)=(0.95, 0.07, 0.8)$, 并在H点附近另取 τ 的值为0.5891。初始值为 $\theta_7(0)$ 的蓝色轨道与初始值为 $\theta_8(0)$ 的红色轨道分别趋于不同的稳定周期轨道, 而初始值为 $\theta_9(0)$ 的绿色轨道会向外盘旋最终趋于无病平衡点。因此, 在蓝色轨道与红色轨道之

间有一个稳定极限环,在绿色轨道与红色轨道之间有一个不稳定极限环。相位图如 5(b) 所示,图 5(b) 中小图是对大图中红色和蓝色周期轨道放大的结果。



(b) 稳定极限环与不稳定极限环

图 5 相位图

Fig. 5 Phase portrait

5 结 论

在现实生活中,治疗是应对疾病最直接和有效的方法。但是,在严重疾病暴发期间,由于医疗资源有限,需要治疗的患者数量可能会超过治疗能力,这就意味着接受治疗的患者数量会达到饱和水平。因此,本文在 Gross 等^[6]提出的传染病模型基础上,建立了自适应网络上带有饱和治疗函数的传染病模型,研究了适应性行为与医疗资源共同作用下对疾病传播的影响。为了封闭系统,本文采用了泊松分布下的三元组逼近公式,然后研究降维后的系统。首先,本文分析了无病平衡点 E_0 的稳定性并得到了基本再生数 R_0 。在分析正平衡点时,本文先利用参数间的矛盾排除了一些特殊情况,然后分析剩余情况确定了地方病平衡点的个数,并利用 Hurwitz 判据分析了地方病平衡点的稳定性。此外,用分支理论证明了模型存在后向分支、鞍结点分支与 Hopf 分支,并通过数值模拟的方法给出了第一李雅普诺夫系数。最终结果表明,函数所含参数 δ 与 α 都会使系统发生

后向分支;而重连率 ω 会使系统出现后向分支、鞍结点分支与 Hopf 分支一系列复杂现象,并且可以发现系统存在一个稳定的极限环。结果也表明提高治愈率与降低治疗延误影响程度都能抑制疾病的传播。因此,医疗资源与适应性行为在疾病传播中的作用都很显著,不能忽视。同时,考虑其他因素对网络拓扑结构的影响或者采用其他逼近方法来研究疾病的传播也值得进一步探讨。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献:

- [1] 靳祯,孙桂全,刘茂省. 网络传染病动力学建模与分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [2] 马知恩,周义仓,王稳地,等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Physical Review E, 2001, 63(6): 066117.
- [4] LUO X F, ZHANG X G, SUN G Q, et al. Epidemic dynamics of SIS pair approximation models on regular and random networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2014, 410: 144-153.
- [5] WU Q C, ZHANG F. Threshold conditions for SIS epidemic models on edge-weighted networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2016, 453: 77-83.
- [6] GROSS T, D'LIMA C J D, BLASIUS B. Epidemic dynamics on an adaptive network[J]. Physical Review Letters, 2006, 96(20): 208701.
- [7] JUHER D, RIPOLL J, SALDAÑA J. Outbreak analysis of an SIS epidemic model with rewiring[J]. Journal of mathematical biology, 2013, 67(2): 411-432.
- [8] TUNC I, SHAW L B. Effects of community structure on epidemic spread in an adaptive network[J]. Physical Review E, 2014, 90(2): 022801.
- [9] PIANKORANEE S, LIMKUMNERD S. Effect of local rewiring in adaptive epidemic networks[J]. Physics Letters A, 2020, 384(15): 126308.
- [10] ZHANG X G, SHAN C H, JIN Z, et al. Complex dynamics of epidemic models on adaptive networks[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 266(1): 803-832.
- [11] LU J N, ZHANG X G. Bifurcation analysis of a pair-

- wise epidemic model on adaptive networks[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, 16(4): 2973-2989.
- [12] BODÓ Á, SIMON P L. Analytic study of bifurcations of the pairwise model for SIS epidemic propagation on an adaptive network [J]. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2020, 28(4): 807-826.
- [13] ZHANG J J, QIAO Y H. Bifurcation analysis of an SIR model considering hospital resources and vaccination [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2023, 208: 157-185.
- [14] UPADHYAY R K, PAL A K, KUMARI S, et al. Dynamics of an SEIR epidemic model with nonlinear incidence and treatment rates [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(4): 2351-2368.
- [15] LU Y L, JIANG G P. Backward bifurcation and local dynamics of epidemic model on adaptive networks with treatment [J]. *Neurocomputing*, 2014, 145: 113-121.
- [16] KEELING M J. The effects of local spatial structure on epidemiological invasions [J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 1999, 266(1421): 859-867.
- [17] CASTILLO-CHAVEZ C, SONG B. Dynamical models of tuberculosis and their applications [J]. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 2004, 1(2): 361-404.
- [18] YU P. Closed-form conditions of bifurcation points for general differential equations [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(4): 1467-1483.
- [19] PERKO L. *Differential equations and dynamical systems* [M]. 3rd ed. New York: Springer, 2001.

(上接第 225 页)

- [27] MEHTA S, RASTEGARI M. Separable self-attention for mobile vision transformers [DB/OL]. (2022-06-06) [2025-06-12]. <https://arxiv.org/abs/2206.02680>.
- [28] WADEKAR S N, CHAURASIA A. Mobilevitv3: Mobile-friendly vision transformer with simple and effective fusion of local, global and input features [DB/OL]. (2022-09-30) [2025-06-12]. <https://arxiv.org/abs/2209.15159>.
- [29] IANDOLA F N, HAN S, MOSKEWICZ M W, et al. SqueezeNet: AlexNet-level accuracy with 50x fewer parameters and <0.5 MB model size [DB/OL]. (2016-02-24) [2025-06-12]. <https://arxiv.org/abs/1602.07360>.
- [30] VERKERKEN M, D'HOOGE L, SUDYANA D, et al. A novel multi-stage approach for hierarchical intrusion detection [J]. *IEEE Transactions on Network and Service Management*, 2023, 20(3): 3915-3929.
- [31] GORYUNOV M N, MATSKEVICH A G, RYBOLOVLEV D A. Synthesis of a machine learning model for detecting computer attacks based on the CICIDS2017 dataset [J]. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 2020, 32(5): 81-94.
- [32] GETMAN A I, RYBOLOVLEV D A, NIKOLSKAYA A G. Deep learning applications for intrusion detection in network traffic [J]. *Programming and Computer Software*, 2024, 50(7): 493-510.
- [33] BELARBI O, KHAN A, CARNELLI P, et al. An intrusion detection system based on deep belief networks [C]//International Conference on Science of Cyber Security. Cham: Springer International Publishing, 2022: 377-392.
- [34] MOUSTAFA N, SLAY J. UNSW-NB15: A comprehensive data set for network intrusion detection systems (UNSW-NB15 network data set) [C]//2015 Military Communications and Information Systems Conference (MilCIS), 2015: 1-6.