

一类具有容量状态约束的SIR模型的短期最优控制

余佳琦, 李毅红, 李伟强*

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 在传染病暴发的初期, 尤其对于新发传染病, 非药物干预措施对于遏制传染病的扩散起着至关重要的作用。相较于大多数已有的文献关注长时域或无穷时域, 研究短时域上的非药物干预的最优实施问题具有更大的现实意义。本文研究了一类关于SIR模型的短期最优控制问题, 为了体现疾病渗流不能超过医疗系统承载能力的要求, 该问题还考虑了一个状态约束。本文试图寻找最优的非药物干预措施, 旨在最大化最终易感者的规模。不同于传统的方法, 本文基于已有的结论构造了一种新的理论框架用于求解所提出的最优控制问题。最优解被证实为仅包含单次切换的bang-bang控制, 具体而言, 在初始阶段以最大强度实施干预措施, 并在一个最优切换点后干预措施被完全移除。这种控制形式对于不同的初始条件展现出良好的鲁棒性。

关键词: 最优控制; 非药物干预; bang-bang控制; 短时域; 容量状态约束

中图分类号: O175

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.10.0017

引用格式: 余佳琦, 李毅红, 李伟强. 一类具有容量状态约束的SIR模型的短期最优控制[J]. 中北大学学报(自然科学版), DOI:10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.10.0017.

Yu Jiaqi, Li Yihong, Li Weiqiang. One Kind of Short-Term Optimal Control of an SIR Model with a Capacity State Constraint [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), DOI: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.10.0017.

One Kind of Short-Term Optimal Control of an SIR Model with a Capacity State Constraint

Yu Jiaqi, Li Yihong, Li Weiqiang*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: At the early stage of outbreak of an infectious disease, particularly a newly emerging disease, non-pharmaceutical interventions play a crucial role in curbing the spread of disease. Compared to long-term or infinite-term issues that the majority of existing work focus on, investigating the optimal implementation of non-pharmaceutical interventions on short-term horizon has greater practical significance. This paper examines a kind of short-term optimal control problems for an SIR model. To reflect the requirement that the disease prevalence must not exceed the capacity of health-care system, the problem incorporates a state constraint. The paper seeks to identify optimal non-pharmaceutical interventions, aimed at maximizing the final size of susceptible individuals. In contrast to traditional approaches, based on prior results, this paper constructs a

收稿日期: 2025-10-24

基金项目: 山西省基础研究计划青年科学研究项目(202203021222078)

作者简介: 余佳琦(2000—), 女, 硕士生, 主要从事生物数学的研究。

* 通信作者: 李伟强(1992—), 男, 讲师, 博士, 主要从事生物数学的研究。E-mail: wqli@nuc.edu.cn.

novel theoretical framework for solving the proposed problem. The optimal solution is proved to be a bang-bang control involving a single switch, more precisely, the interventions are imposed at the maximum intensity during the initial phase, and then lifted completely after an optimal switching point. This control form exhibits good robust performance across varying initial conditions.

Key words: optimal control; non-pharmaceutical interventions; bang-bang control; short-term horizon; capacity state constraint

0 引言

如何对传染病实施最优的控制策略一直是研究者关注的焦点。从社会层面看,过度干预会对正常的社会秩序与经济活动造成严重的影响,导致商业活动停滞、企业运营受阻,进而引发大规模的失业与经济衰退。从个人层面看,企业停工停产与效益下滑会直接导致个人收入的减少,给家庭带来严重的经济压力。此外,长期管控还可能引发公众的心理健康问题。因此,探究如何采取最优的控制策略来遏制或缓解传染病的传播具有重要的现实意义。

针对传染病的控制策略主要分为两大类,即药物干预^[1-9]和非药物干预^[10-17]。对于处于暴发初期的传染病,尤其是新发传染病,由于传播特性暂不清晰、缺乏有效的疫苗与特效药物尚不明确,非药物干预,包括隔离^[3-4,14]、社交距离^[13,15]等策略,是遏制传染病传播的核心手段。

近年来,非药物干预的最优实施问题备受学术界的关注。Angulo等^[10]在疾病渗流(Disease Prevalence)不超过某一阈值的约束下,提出了最小化干预持续时间的最优控制策略。Avram等^[11]研究了固定时域下非药物干预的最优实施问题,而Miclo等^[12]借助不同的方法讨论了无穷时域的情形。对于上述问题,最优解具有一个共同的特征:最优解包含了一段“满载原则(Filling the Box Policy)”。另一方面,鉴于非药物干预措施的实施必然引发社会与经济的代价,考虑非药物干预措施的时间或代价约束的最优控制问题也受到了广泛关注。Bliman等^[13]研究了一个旨在最大化最终易感者比例的最优控制问题,其中,非药物干预措施只能在一个具有给定的最大持续时间的区间内实施。Feng等^[14]与Bliman等^[15]探讨了类似的最优控制问题,它们要求实施非药物干预措施的总时长等于或不超过一个给定的值,而不再局限于干预措施只能在一个单一的区间内实施。

Britton等^[16]与Balderrama等^[17]考虑了更一般的情形,引入了非药物干预措施的总代价约束,但是后者还要求非药物干预措施只能在一个有限区间内实施。与之前的问题不同,这些问题的最优解为bang-bang控制,其特征为在一个时间段内以最大强度实施干预措施,但在其它时间段内不施加任何控制。

尽管对最优的非药物干预措施的研究已取得显著进展,但是已有的研究忽视了一个重要的问题。绝大部分工作聚焦于长时域或无穷时域上的最优控制问题,所谓长时域,指的是时域足够长使得尽管此后不再施加任何控制,染病者比例也不再增加^[10-11]。然而,在传染病暴发的早期阶段,尤其是在有效疫苗普遍接种之前,非药物干预措施对遏制疫情的传播起着关键性的作用。因此,本文研究短期最优控制问题。此外,考虑到实施控制策略的核心目标之一是防止出现医疗资源挤兑^[12],本文引入了一个容量状态约束。不同于常见的庞特里亚金极大值原理(Pontryagin's Maximum Principle)和哈密顿-雅可比方程(Hamilton-Jacobi Equation)等方法^[18],受到Angulo等^[10]工作的启发,本文构造了一种新的理论框架用于求解所提出的最优控制问题,即通过比较状态轨迹的相对位置从而确定最优轨迹。

1 最优控制问题

本文通过非药物干预措施研究SIR模型的最优控制问题,该模型可以由以下微分方程组刻画^[19-20]

$$\dot{S} = -(1-u)\beta SI, \quad \dot{I} = (1-u)\beta SI - \gamma I, \quad (1)$$

式中: S 和 I 分别为易感者和染病者的比例; β 和 γ 分别对应感染率和恢复率。假设传染病的总人口保持不变,因此,在系统中省略了关于恢复者 R 的动力学方程。在数学上,非药物干预措施对传染病动力学的影响通过控制参数 u 体现,换言之,在非药物干预措施的作用下,感染率从 β 降低为

$(1-u)\beta$ 。

该问题具有两个主要特征：一方面，本文讨论短时域上的最优控制问题；另一方面，本文还引入一个关于疾病渗流 $I(t)$ ，即染病者的比例，的状态约束： $I(t)$ 不超过一个特定的阈值，该阈值可被解释为医疗系统的承载能力，记为 $I_{\max}$ 。一旦染病者的比例 I 超过阈值 $I_{\max}$ ，医疗资源就可能出现短缺，从而造成死亡率显著上升。

综上，本文提出如下具有状态约束和终端约束的最优控制问题：

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } J(x, u) = S(t_T) \\ & \text{subject to } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ & \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, t_T], \\ & \quad I \leq I_{\max}, \\ & \quad x(0) = x_0, \quad I(t_T) = I_{\max}, \quad (\text{OC}) \end{aligned}$$

式中： $x = (S, I)^T$ 表示状态变量； x_0 表示系统(1)的初始条件。在本文中，仅考虑 $u(t)$ 为分段连续函数，且满足 $u(t) \in U := [0, u_{\max}]$ ，其中， $u_{\max} \in (0, 1]$ 表示可实行的最大干预强度。在这里，上界 $u_{\max}$ 的设定反映了通过实施非药物干预感染率可以实现的最大的缩减程度。状态约束 $I \leq I_{\max}$ 反映了染病者比例 $I(t)$ 维持在医疗系统的承载能力 $I_{\max} \in (0, 1]$ 之下。在这里， $I_{\max}$ 的取值较小，以保证状态约束 $I \leq I_{\max}$ 必须在非药物干预作用下才能实现。此外，问题(OC)也增加了终端约束 $I(t_T) = I_{\max}$ ，否则该问题的最优解是平凡的。在本文中，假设当 $u=0$ 时，即未施加控制策略，系统(1)的基本再生数 $R_0 = \beta/\gamma > 1$ 。

2 问题 (OC) 的最优解

首先，考虑在初始时刻 $t=0$ ， $I=I_{\max}$ 的情形。

定理 1 对于初始条件 $x_0 = (S_0, I_0)^T$ ，其中， $S_0 > \gamma/\beta$ ， $I_0 = I_{\max}$ ，若终端时刻 t_T 较小，则问题(OC)的最优解 $u^*(t)$ 为 bang-bang 控制，其具有如下形式：

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \in [0, t_c], \\ 0, & t \in (t_c, t_T], \end{cases}$$

其中，切换时刻 t_c 是由 β 、 γ 、 S_0 、 t_T 与 $I_{\max}$ 确定的常数。

在下文中，把满足定理1中条件的问题(OC)称为问题(OC')。

注 在定理1中，终端时刻 t_T 较小的条件是必不可少的。容易证明，随着 t_T 的增加， $S(t_T)$ 的

可能最大值减小；一旦 t_T 足够大，终端条件 $I(t_T) = I_{\max}$ 将无法满足。

对于问题(OC')，任一可行轨迹均由一段或多段弧组成，每段弧的起点和终点均位于 $I = I_{\max}$ 上。

基于上述事实，为证明定理1，定义两类弧。考虑连接位于 $I = I_{\max}$ 上两个给定的点，起点 $x_b := (S_b, I_b)^T$ 和终点 $x_d := (S_d, I_d)^T$ 的所有可能的弧，这意味着 $I_b = I_d = I_{\max}$ 。文献[10]指出，任意两段弧的时间成本，即沿着它们所用的时长，可以根据它们的相对位置直接比较。据此可知，上述所有弧中，时间成本最大的弧，记作 $\hat{L}$ ，可以由以下控制函数 $\hat{u}$ 生成：

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \in [t_b, t_c], \\ 0, & t \in (t_c, t_d], \end{cases} \quad (2)$$

式中： t_b 和 t_d 分别表示起始时刻和终止时刻； t_c 表示切换时刻。需要指出的是，一旦 t_b 和 x_b 给定， t_c 和 t_d 可以由 x_d 唯一确定。弧 $\hat{L}$ 被称为边界弧，其它的弧统称为内部弧。

接下来，给出关于边界弧的两个结论。

引理 1 对于两段边界弧 L^i ， $i \in \{1, 2\}$ ，满足 $S_b^1 = S_b^2$ ，如果 $S_d^1 < S_d^2$ ，那么 $C^1 > C^2$ ，反之亦然。这里， S_b^i 表示第 i 段边界弧初始时刻的易感者比例， S_d^i 表示终端时刻的易感者比例， C^i 表示对应的时间成本。

显然，引理1成立。

引理 2 给定 t_b 、 t_d 和 x_b ，若 $t_b - t_d > 0$ 且取值较小，同时， $S_b > \gamma/\beta$ ，则存在唯一的 t_c 和 x_d ，使得在由式(2)定义的控制 $\hat{u}$ 作用下，存在一段连接 x_b 和 x_d 的边界弧。

证明 首先，给出一个结论^[10,20]。由系统(1)可知，如果在某一区间 $[t_1, t_2]$ 上， $u \equiv u_0 \neq 1$ ，那么对于 $t \in (t_1, t_2]$ ，有

$$\begin{aligned} I(t) + S(t) - \frac{\gamma}{(1-u_0)\beta} \ln S(t) &= \\ I(t_1) + S(t_1) - \frac{\gamma}{(1-u_0)\beta} \ln S(t_1). \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)表明，当 $S(t_1)$ 和 $I(t_1)$ 已知时， $I(t)$ 可以表示为 $S(t)$ 的函数，记作 $I(S; S(t_1), I(t_1), u_0)$ ，其表达式依赖于控制常数 u_0 。因此，由系统(1)可知，

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{(1-u_0)\beta} \int_{S(t_1)}^{S(t_2)} \frac{dS}{SI(S; S(t_1), I(t_1), u_0)}.$$

特别地,若在 $[t_1, t_2]$ 上, $u \equiv 1$, 则

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{I(t_2)}{I(t_1)} \right).$$

$$t_d - t_b = \begin{cases} -\frac{1}{(1-u_{\max})\beta} \int_{S_b}^{S_c} \frac{dS}{SI(S; S_b, I_b, u_{\max})} - \frac{1}{\beta} \int_{S_c}^{S_d} \frac{dS}{SI(S; S_c, I_c, 0)}, & u_{\max} < 1, \\ -\frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{I_c}{I_b} \right) - \frac{1}{\beta} \int_{S_c}^{S_d} \frac{dS}{SI(S; S_c, I_c, 0)}, & u_{\max} = 1, \end{cases} \quad (4)$$

式中: $S_c := S(t_c)$; $I_c := I(t_c)$ 。

一方面, 式(4)表明, 在任何情形下, 式(4)右

现在, 若存在一段连接 x_b 和 x_d 的边界弧, 则其时间成本为

侧表达式关于 S_d 是连续的。注意到 S_c 和 I_c 也可视为 S_d 的函数, 因为由式(3)可知以下结论成立

$$I_d + S_d - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_d = I_c + S_c - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_c =$$

$$\begin{cases} I_b + S_b - \frac{\gamma}{(1-u_{\max})\beta} \ln S_b + \frac{u_{\max}\gamma}{(1-u_{\max})\beta} \ln S_c, & u_{\max} < 1; \\ I_c + S_b - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_b, & u_{\max} = 1. \end{cases}$$

另一方面, 引理1表明, 该表达式关于 S_d 是单调的。因此, 根据式(4), 可以确定唯一的 S_d 。一旦 S_d 确定, t_c 也可以唯一确定。

基于上述的讨论, 定理1的证明可以归结为以下两个命题。

命题1 对于问题(OC'), 最优轨迹由一段或多段边界弧组成。

证明 假设最优轨迹 x^* 包含一段内部弧 L^* 。下面构造一条完全由边界弧组成的可行轨迹。

首先, 考虑内部弧 L^* 是最优轨迹 x^* 的最后一段弧的情形。接下来, 定义两条边界弧 L^1 和 L^2 。为简洁起见, 沿用之前的符号。一方面, L^1 和 L^2 均与 L^* 具有相同起点; 另一方面, L^1 与 L^* 具有相同终点, 而 L^2 与 L^* 的时间成本相同。因此,

$$C^1 > C^* = C^2,$$

式中: C^* 表示 L^* 的时间成本。根据引理1, 可得

$$S_d^1 = S_d^* < S_d^2, \quad (5)$$

式中: S_d^* 表示对应于 L^* 的终端时刻易感者比例。现将 L^* 替换为 L^2 , 并保持其他的弧不变, 则构成一条新的可行状态轨迹 x^{new} 。因为 L^* 和 L^2 分别是 x^* 和 x^{new} 的最后一段弧, 所以, 由式(5)可知,

$$J(x^{\text{new}}, u^{\text{new}}) > J(x^*, u^*), \quad (6)$$

式中: u^* 和 u^{new} 分别为对应于 x^* 和 x^{new} 的控制函数。这一结果与轨迹 x^* 的最优性假设矛盾。

接下来, 考虑另一种情况, 即 L^* 为 x^* 的中间部分。与上述情况不同, 现在通过两步构造一条新的可行状态轨迹。第一步, 将内部弧 L^* 替换为一段与 L^* 具有相同起点和终点的边界弧, 这样的

替换会导致新的状态轨迹(记作 x^{ter})的时间成本大于原状态轨迹 x^* 的时间成本。第二步, 调整 x^{ter} 的最后一段(或多段)边界弧, 使得新的状态轨迹(记作 x^{new})的时间成本恰好等于 x^* 的时间成本。根据引理2, 该步骤是可行的。相较于 x^{ter} 的最后一段(或多段)弧, x^{new} 的最后一段(或多段)弧的时间成本更小, 因此, 可以类似得到式(6), 这一结果同样与轨迹 x^* 的最优性假设矛盾。

命题2回答了最优轨迹所含边界弧数量的问题。

命题2 对于问题(OC'), 最优轨迹仅由一段边界弧组成。

证明 假设最优轨迹 x^* 由多段边界弧组成。定义两条均由一段边界弧组成的状态轨迹 x^n 和 x^m : x^n 是一条可行的状态轨迹; x^m 与 x^* 具有相同的起点和终点。因此,

$$C^m > C^* = C^n,$$

式中: C^* 、 C^n 和 C^m 分别表示状态轨迹 x^* 、 x^n 和 x^m 的时间成本。根据引理1, 可得

$$S_T^* = S_T^m < S_T^n,$$

式中: S_T^* 、 S_T^m 与 S_T^n 分别表示对应于 x^* 、 x^n 与 x^m 的终端时刻易感者比例。于是,

$$J(x^n, u^n) > J(x^*, u^*),$$

式中: u^* 和 u^n 分别为对应于 x^* 和 x^n 的控制函数。这一结果同样与轨迹 x^* 的最优性假设矛盾。

接下来, 放宽对初始条件的限制, 可以得到以下结论。

定理2 对于初始条件 $x_0 = (S_0, I_0)^T$, 其中,

$S_0 > \gamma/\beta$, $I_0 < I_{\max}$, 若 t_T 较小, 则问题(OC)的最优解 $u^*(t)$ 为 bang-bang 控制, 其具有如下形式:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \in [0, t_c], \\ 0, & t \in (t_c, t_T], \end{cases}$$

其中, 切换时刻 t_c 是由 β 、 γ 、 S_0 、 t_T 与 $I_{\max}$ 确定的常数。

3 数值验证

利用 MATLAB 对系统(1)的理论结果进行数值验证, 仿真参数为感染率 $\beta = 0.5$, 恢复率 $\gamma = 0.1$, 初始条件 $x_0 = (0.7, 0.3)^T$, 医疗系统的承载能力 $I_{\max} = 0.3$ 。

图 1 对比了两段边界弧 L^1 与 L^2 (黑色虚线与灰色实线), 以及一段内部弧 L^* (黑色实线)。一方面, 弧 L^1 和 L^2 均与弧 L^* 具有相同的起点; 另一方面, 弧 L^1 与 L^* 的终点相同, 而弧 L^2 与 L^* 的时间成本相同。对于弧 L^* ,

$$u = \begin{cases} 0.8, & t \in [0, 8.03]; \\ 0, & t \in (8.03, 10.00] \end{cases}$$

对于弧 L^1 ,

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, 8.20]; \\ 0, & t \in (8.20, 12.56] \end{cases}$$

对于弧 L^2 ,

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, 6.63]; \\ 0, & t \in (6.63, 10.00] \end{cases}$$

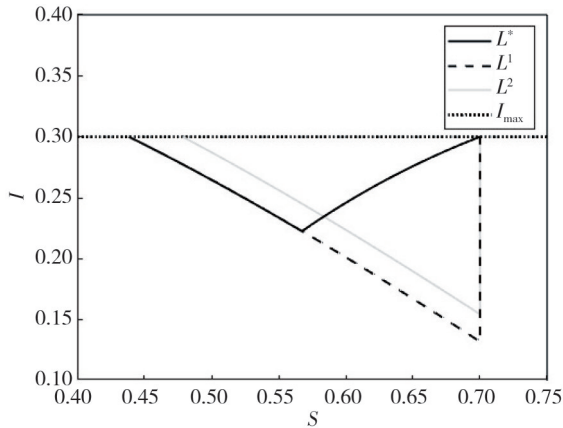


图 1 一段内部弧和两段边界弧的对比

Fig. 1 Comparison between an internal arc and two boundary arcs

由图 1 可知, 边界弧 L^2 对应的最终易感者比例 S_d^2 大于内部弧 L^* 对应的最终易感者比例 S_d^* , 从而证明了命题 1 的正确性。

图 2 对比了分别由两段边界弧与一段边界弧组成的可行状态轨迹 x^* (黑色实线) 与 x^n (灰色实

线), 以及仅由一段边界弧组成的状态轨迹 x^m (黑色虚线)。状态轨迹 x^* 和 x^m 具有相同的起点和终点。对于状态轨迹 x^* ,

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2.77] \cup (4.00, 6.53], \\ 0, & t \in (2.77, 4.00] \cup (6.53, 8.00] \end{cases}$$

对于状态轨迹 x^n ,

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, 5.38], \\ 0, & t \in (5.38, 8.00] \end{cases}$$

对于状态轨迹 x^m ,

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, 6.25], \\ 0, & t \in (6.25, 9.38] \end{cases}$$

由图 2 可知, 在终端时刻 $t_T = 8$, 状态轨迹 x^n 对应的最终易感者比例 S_T^n 比状态轨迹 x^* 对应的最终易感者比例 S_T^* 更大, 该结论与命题 2 的结论一致。

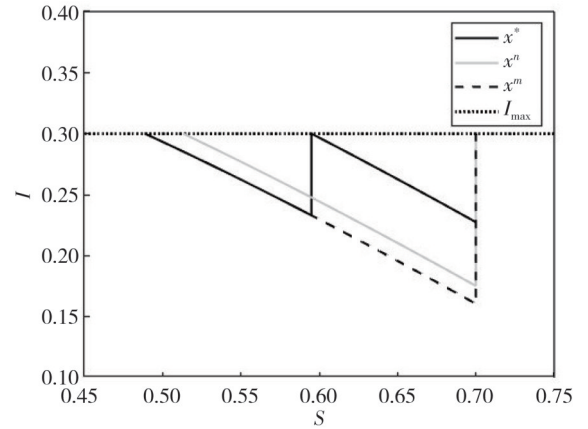


图 2 3 条状态轨迹的对比

Fig. 2 Comparison between three state trajectories

4 结论

本文研究了一类具有容量状态约束的 SIR 模型的短期最优控制问题, 并证明了最优解为仅含单次切换的 bang-bang 控制。这一控制模式对于不同的初始条件依然成立, 展现出良好的鲁棒性。与常用的方法相比, 本文提出的理论框架具有较强的直观性, 且不依赖于大量的数学推导。

本文讨论的最优控制问题仍存在一定的局限性。首先, 本文忽视了非药物干预措施所带来的社会与经济成本。实际上, 非药物干预措施的实施必然引发显著的社会与经济代价。基于这一事实, 一些研究者引入了对控制措施的实施时长或总成本的约束, 从而反映控制资源有限的现象^[16]。其次, 本文引入终端约束 $I = I_{\max}$ 主要是为了确保

提出的最优控制问题具有研究价值且易于求解, 但该终端约束缺乏现实意义。在未来研究中, 我们将针对这些不足进行改进。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献:

- [1] BOLZONI L, DELLA MARCA R. On the optimal vaccination control of SIR model with Erlang-distributed infectious period[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2025, 205(2): 39.
- [2] MOSCHEN L M, ARONNA M S. Bang-bang optimal control of vaccination in metapopulation epidemics with linear cost structures[J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2025, 9: 492-497.
- [3] BOLZONI L, BONACINI E, DELLA MARCA R, et al. Optimal control of epidemic size and duration with limited resources[J]. *Mathematical Biosciences*, 2019, 315: 108232.
- [4] HANSEN E, DAY T. Optimal control of epidemics with limited resources[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2011, 62(3): 423-451.
- [5] BOLZONI L, BONACINI E, SORESINA C, et al. Time-optimal control strategies in SIR epidemic models[J]. *Mathematical Biosciences*, 2017, 292: 86-96.
- [6] DELLA ROSSA M, FREDDI L, GOREAC D. Optimality of vaccination for an SIR epidemic with an ICU constraint[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2024, 204(1): 8.
- [7] 杨汝婕, 邱宏, 鞠学伟. 多次疫苗接种及时间延迟的随机传染病模型的灭绝与最优控制[J]. *数学理论与应用*, 2025, 45(2): 110-121.
YANG Rujie, QIU Hong, JU Xuewei. Extinction and optimal control of stochastic epidemic model with multiple vaccinations and time delay[J]. *Mathematical Theory and Applications*, 2025, 45(2): 110-121. (in Chinese)
- [8] 赵安鹏, 孟海霞. 一类具有潜伏性和传染性的 SEAIRQ 模型的最优控制与数值模拟[J]. *扬州大学学报(自然科学版)*, 2025, 28(3): 13-20.
ZHAO Anpeng, MENG Haixia. Optimal control and numerical simulation of a class of SEAIRQ models with latent and infectious properties[J]. *Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition)*, 2025, 28(3): 13-20.
- [9] 王芳. 基于网络传染病的医疗资源最优控制与分配策略研究[D]. 太原: 中北大学, 2024.
- [10] ANGULO M T, CASTAÑOS F, MORENO-MORTON R, et al. A simple criterion to design optimal non-pharmaceutical interventions for mitigating epidemic outbreaks[J]. *Journal of the Royal Society Interface*, 2021, 18(178): 20200803.
- [11] AVRAM F, FREDDI L, GOREAC D. Optimal control of a SIR epidemic with ICU constraints and target objectives[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 418: 126816.
- [12] MICLO L, SPIRO D, WEIBULL J. Optimal epidemic suppression under an ICU constraint: an analytical solution[J]. *Journal of Mathematical Economics*, 2022, 101: 102669.
- [13] BLIMAN P A, DUPREZ M. How best can finite-time social distancing reduce epidemic final size?[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2021, 511: 110557.
- [14] FENG Y, IYER G, LI L. Scheduling fixed length quarantines to minimize the total number of fatalities during an epidemic[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2021, 82(7): 69.
- [15] BLIMAN P A, RAPAPORT A. On the problem of minimizing the epidemic final size for SIR model by social distancing[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2023, 56(2): 4049-4054.
- [16] BRITTON T, LESKELÄ L. Optimal intervention strategies for minimizing total incidence during an epidemic[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2023, 83(2): 354-373.
- [17] BALDERRAMA R, PRIETO M I, DE LA VEGA C S, et al. Optimal control for an SIR model with limited hospitalised patients[J]. *Mathematical Biosciences*, 2024, 378: 109317.
- [18] CLARKE F. *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*[M]. London: Springer, 2013.
- [19] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1927, 115(772): 700-721.
- [20] LI M Y. *An introduction to mathematical modeling of infectious diseases*[M]. Cham: Springer, 2018.