

文章编号: 1673-3193(XXXX)XX-0001-08

基于异质预期与非线性成本的 Stackelberg 双寡头 博弈演化模型动力学性态分析与混沌控制

付超, 李桂花*

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 在次序决策型 Stackelberg 双寡头企业中, 考虑了领导者企业与追随者企业采取不同的产量预期策略, 以及生产过程中普遍存在的边际成本递增现象, 建立了具有异质预期策略及非线性成本的动态演化博弈模型。通过分析其动力学性态, 得到系统始终存在一个边界均衡点与唯一的正均衡点, 并利用 Jury 判据给出了正均衡点局部渐近稳定及发生倍周期分支的条件。由于倍周期分支最后通向混沌, 进一步通过状态控制得到使系统由混沌恢复稳定的边界条件。最后数值模拟了领导者企业的产量调整速度参数对系统稳定性影响, 发现随着该参数增大, 系统由稳定状态经倍周期分支最后通向混沌, 表明领导者的过度反应是破坏企业间策略协调并引发市场失稳的关键因素。验证了通过控制将系统混沌状态调整为稳定状态的有效性。本文给出的异质预期与非线性成本共同驱动下企业间竞争的演化规律, 可以为次序决策型市场结构的稳定性分析与调控策略提供理论依据。

关键词: Stackelberg 模型; 倍周期分支; 稳定性; 混沌控制

中图分类号: O175.1

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.11.0012

引用格式: 付超, 李桂花. 基于异质预期与非线性成本的 Stackelberg 双寡头博弈演化模型动力学性态分析与混沌控制[J]. 中北大学学报(自然科学版), DOI: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.11.0012.

Fu Chao, Li Guihua. Dynamic Analysis and Chaos Control in an Evolutionary Stackelberg Duopoly Game Model with Heterogeneous Expectations and Nonlinear Costs[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), DOI: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.11.0012.

Dynamic Analysis and Chaos Control in an Evolutionary Stackelberg Duopoly Game Model with Heterogeneous Expectations and Nonlinear Costs

Fu Chao, Li Guihua*

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: In this study, we investigate a dynamic evolutionary game model with heterogeneous expectations and nonlinear costs in a Stackelberg duopoly under sequential decision-making, where the leader and follower adopt distinct output expectation strategies while accounting for the prevalent phenomenon of increasing marginal costs in production. Through dynamical analysis, we obtain that there exist a boundary equilibrium and a unique positive equilibrium in the system. Using the Jury criterion, we derive the local asymptotic stability condition

收稿日期: 2025-11-04

基金项目: 山西省自然科学基金项目(202203021212130)

作者简介: 付超(1998—), 女, 硕士生, 主从事应用数学的研究。

* 通信作者: 李桂花(1973—), 女, 教授, 博士, 主要从事应用数学的研究。E-mail: liguihua@nuc.edu.cn。

of the positive equilibrium and the threshold for period-doubling bifurcation. While the period-doubling bifurcation eventually leads to chaos, stability can be restored to the system by implementing boundary conditions obtained through state control. Finally, numerical simulations on the leader's output adjustment speed demonstrate that the system evolves from stability to chaos via period-doubling bifurcations as the parameter increases, indicating that the leader's overreaction is a key factor in disrupting inter-firm strategic coordination and triggering market instability. The effectiveness of the control strategy in stabilizing the chaotic system is validated, thereby revealing the evolutionary mechanisms governing firm competition under heterogeneous expectations and nonlinear costs. This work provides a theoretical basis for analyzing and regulating stability within sequential decision-making market structures.

Key words: Stackelberg model; period-doubling bifurcation; stability; chaos control

现代市场经济中,寡头垄断是一种普遍存在的市场结构,通常表现为少数几家大型企业对市场价格与产量决策起到决定性作用^[1]。在此结构中,双寡头竞争格局尤为常见,其企业间的产量互动关系主要呈现两种典型形态:其一为同步决策型,即两家实力相当的企业在不知晓对方当期产量决策的情况下,同时制定各自的产量水平。例如,在饮料行业中,可口可乐与百事可乐在制定年度生产计划时,往往基于对市场需求与竞争对手产能的预判,在信息不透明的状态下同步确定产量规模。此类以产量为决策变量、基于不完全信息的同步博弈行为,通常可由 Cournot 模型描述^[2];其二为次序决策型,即由市场中的领导者企业率先确定其产量,追随者企业则在观测到领导者产量决策后再制定自身策略。比如,通信设备制造业中,华为等行业领导者率先规划其产能规模,而如小米、中兴等追随者企业则需根据前者的产量布局相应调整其生产计划与市场策略。此类具有明显次序性的产量决策互动,主要由 Stackelberg 博弈模型进行研究^[3]。

近年来,许多学者在假设企业间具有相同决策规则和预期方式(同质性)的基础上,对 Stackelberg 博弈模型进行了研究(如文献[4-10]假设双方寡头企业均采用有限理性预期)。然而,在次序决策型的寡头竞争格局中,领导者企业与追随者企业不同的市场地位,决定了二者在信息获取能力与决策能力上可能存在差异。这种差异会影响二者对未来产量决策的判断,进而形成不同的预期方式(如一方倾向于超前预测的有限理性预期,另一方可能采用适应性预期或静态预期)。针对企业间的异质预期行为,文献[11]研究了领导者企业与追随者企业分别采取有限理性预期和静态预期时的动态博弈行为。基于这些研究的启发,本

文在 Stackelberg 模型中考虑一类新的异质预期组合,即领导者企业采取有限理性预期、追随者企业采取适应性预期,分析这种异质预期下企业的决策调整速度对市场动态的影响,以期更准确地刻画非对称寡头竞争中的企业策略互动。

要深入揭示市场竞争的复杂动态,不仅需要考虑决策者的异质预期,还应重视企业生产过程中的成本结构特征。以通信设备制造业为例,其生产成本随产能变化呈现明显的阶段性特征^[12]:在扩产初期,企业通过引入自动化设备、升级生产线等资本投入方式,有效替代部分人工操作,从而充分发挥规模经济效益,单位成本也随之下降;然而,当产能趋于饱和时,持续增长的额外市场需求迫使企业为获取有限的生产资源(如熟练工人、关键零部件)而付出更高成本,从而推高了生产的边际成本。这种成本结构的动态变化持续影响企业的产能规划与定价决策。在同步决策型寡头模型(如 Cournot 模型)的相关研究中,已有学者借助 Cobb-Douglas 生产函数构建出具有典型非线性特征的二次型成本函数^[13-14],系统揭示了成本结构对企业均衡产量与利润分布的影响机制,为理解复杂生产过程中的投入产出关系提供了重要理论依据。

综上所述,本文建立一个耦合异质预期与非线性成本的 Stackelberg 博弈模型,旨在更准确地描述存在产能约束时企业的策略互动,从而深化对次序决策型寡头市场竞争动态的理解。通过动力学分析与数值模拟,探究其均衡点的存在性与稳定性条件,揭示在异质预期与非线性成本结构共同作用下,市场竞争所呈现的动态演化路径与混沌特征。最后,为应对系统失稳风险,本文还将引入状态反馈控制法^[12]对产生的混沌行为进行有效抑制,以验证模型在维持市场稳定方面的潜在应用价值。

1 模型的建立

为了考虑次序决策型的双寡头企业通过异质预期机制实现各自利润最大化目标,选取领导者企业与追随者企业以产量作为策略变量,分别记为 q_1, q_2 。进一步假设领导企业是根据当前单位产量变化对利润的影响程度(边际利润)调整下期产量,也即采取有限理性预期;假设追随者企业在领导者企业产量影响下依据其企业的历史产量及其当前最优产量的加权平均逐步调整适应市场^[15],也即遵循适应性预期。

下面先计算双寡头企业各自利润最大值,进一步给出产量博弈演化的动态方程。在产量博弈的过程中,一方面两企业在市场中存在一定程度的竞争;另一方面,追随者企业利润的最大值受领导者企业的产量 q_1 的影响,故确定二者最优决策需先求出追随者企业的利润最优值,再确定领导者企业的最优利润,也即采用逆推归纳法^[1]。

企业利润由总收益与生产总成本共同决定。总收益取决于单位产品价格与产量水平(单位产品价格又受市场规模与产品间替代程度共同影响);生产总成本受产能约束等因素的作用,随产量变化呈现非线性特征,通过参考文献^[13]的成本结构,可将领导企业和追随企业在 t 时刻的利润函数分别表示为

$$\pi_1(t) = (a - q_1(t) - dq_2(t))q_1(t) - \frac{1}{2}c_1q_1^2(t) - rK, \quad (1)$$

$$\pi_2(t) = (a - q_2(t) - dq_1(t))q_2(t) - \frac{1}{2}c_2q_2^2(t) - rK, \quad (2)$$

式中: a 表示市场最大规模, $d(0 < d < 1)$ 为产品差异程度,直接影响消费者的选择行为; $\frac{1}{2}c_iq_i^2 + rK$ 为企业在资本投入(K)限制下的成本函数^[13],其中 r 为资本的租金率、 $c_i > 0$ 表示企业的产能约束力度,通过对总成本关于产量 q_i 求偏导,可得到边际成本为产量的线性函数 c_iq_i 。此时随着产量的增加,生产所需的边际成本呈现出递增现象。

根据边际利润和利润函数的关系,对(2)式关于 q_2 求偏导即可得追随者企业的边际利润函数

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\pi_2 = a - 2q_2 - dq_1 - c_2q_2. \quad (3)$$

当边际利润为零时,利润会达到最优值,也

即得到追随者企业的最优产量

$$q_2^*(t) = \frac{a - dq_1(t)}{2 + c_2}. \quad (4)$$

进一步,将 $q_2 = q_2^*$ 代入(1),方程两边关于 q_1 求导,可得领导企业的最优产量

$$q_1^*(t) = \frac{a(d - (2 + c_2))}{d^2 - (2 + c_1)(2 + c_2)}. \quad (5)$$

领导者基于有限理性预期调整策略时,调整幅度不仅取决于边际利润,还受到当前产量水平和调整速度的共同影响^[7],因此领导者产量决策的动态方程为

$$q_1(t+1) = q_1(t) + \theta q_1(t) \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1},$$

其中, $\theta > 0$ 为领导企业在应对市场环境变化时对产量决策的动态调整速度。追随者基于适应性预期的产量决策动态方程可表示为

$$q_2(t+1) = (1 - v)q_2(t) + vq_2^*(t),$$

其中, $0 \leq v \leq 1$ 为追随者的自适应调整系数。因此,考虑异质预期和非线性成本的Stackelberg双寡头博弈模型建立如下:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \theta q_1(t)[a - 2q_1 - dq_2 - c_1q_1], \\ q_2(t+1) = (1 - v)q_2(t) + v\left(\frac{a - dq_1}{2 + c_2}\right). \end{cases} \quad (6)$$

2 均衡点的稳定性和分支

为确定系统(6)的均衡点,令 $q_i(t+1) = q_i(t) \triangleq q_i$,即

$$\begin{cases} q_1 + \theta q_1[a - 2q_1 - dq_2 - c_1q_1] = q_1, \\ (1 - v)q_2 + v\left(\frac{a - dq_1}{2 + c_2}\right) = q_2. \end{cases} \quad (7)$$

显然系统(6)存在边界均衡点 $E_1\left(0, \frac{a}{2 + c_2}\right)$ 。

由式(7)的第二个方程可得 $q_2 = \frac{a - dq_1}{2 + c_2}$,将其代

入第一个方程得 $q_1^* = \frac{a(d - (2 + c_2))}{d^2 - (2 + c_1)(2 + c_2)}$,进而

计算可得 $q_2^* = \frac{a(d - (2 + c_1))}{d^2 - (2 + c_1)(2 + c_2)}$ 。由于所有参

数大于零且 $0 < d < 1$,容易判别 $q_1^*, q_2^* > 0$,因此系统(6)存在唯一的正均衡点 $E_2(q_1^*, q_2^*)$ 。下面分别讨论均衡点的稳定性。

系统(6)在 E_1 处的雅可比矩阵为

$$J|_{E_1} = \begin{bmatrix} 1 + a\theta\left(1 - \frac{d}{2+c_2}\right) & 0 \\ -\frac{dv}{2+c_2} & 1-v \end{bmatrix}。$$

其特征根分别为 $\lambda_1 = 1 + a\theta\left(1 - \frac{d}{2+c_2}\right)$ 和

$\lambda_2 = 1 - v$, 显然 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$, 故

$E_1\left(0, \frac{a}{2+c_2}\right)$ 不稳定。

系统(6)在 E_2 处的雅可比矩阵为

$$J|_{E_2} = \begin{bmatrix} 1 + \theta\left[\frac{a(2+c_1)(2+c_2-d)}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)}\right] & -\frac{d\theta a(d-(2+c_2))}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)} \\ -\frac{dv}{2+c_2} & 1-v \end{bmatrix}。$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \text{Det}(J) = 0,$$

$$\text{Tr}(J) = 2 - v + \theta\left[\frac{a(2+c_1)(2+c_2-d)}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)}\right],$$

其中

$$\text{Det}(J) = 1 - v + \frac{a\theta(2+c_2-d)[(2+c_1)(2+c_2)(1-v) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}。$$

记

$$\theta_1 \triangleq \frac{v(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}{a(2+c_2-d)[(1-v)(2+c_1)(2+c_2) + vd^2]},$$

$$\theta_2 \triangleq \frac{2(2-v)(2+c_2)[(2+c_1)(2+c_2) - d^2]}{a(2+c_2-d)[(2-v)(2+c_1)(2+c_2) + vd^2]}。$$

定理 1 当 $\theta_1 < \theta < \theta_2$ 时, 正均衡点 E_2 局部渐近稳定。

证明 容易验证 $1 - \text{Tr}(J) + \text{Det}(J) = v\theta$ 。

$$1 + \text{Tr}(J) + \text{Det}(J) = \theta\left[\frac{a(2+c_2-d)[(2-v)(2+c_1)(2+c_2) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}\right] + 2(2-v) =$$

$$\left[\frac{a(2+c_2-d)[(2-v)(2+c_1)(2+c_2) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}\right](\theta - \theta_2)。$$

由于参数均大于零且 $0 < d < 1, 0 < v < 1, c_1)(2+c_2) < 0$, 也即

因此 $2+c_2-d > 0, 2-v > 0, d^2-(2+$

$$\frac{a(2+c_2-d)[(2-v)(2+c_1)(2+c_2) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]} < 0。$$

这样 $1 + \text{Tr}(J) + \text{Det}(J)$ 的符号与 $\theta - \theta_2$ 的

符号相反。于是可得, 当 $\theta < \theta_2$ 时, $1 + \text{Tr}(J) +$

$$\text{Det}(J) - 1 = -v + \frac{a\theta(2+c_2-d)[(2+c_1)(2+c_2)(1-v) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]} =$$

$$\frac{a(2+c_2-d)[(2+c_1)(2+c_2)(1-v) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}(\theta - \theta_1)。$$

同理, 因 $2+c_2-d > 0, 1-v > 0, d^2-(2+c_1)(2+c_2) < 0$, 也即

$$\frac{a(2+c_2-d)[(2+c_1)(2+c_2)(1-v) + vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]} < 0。$$

于是 $\text{Det}(J)-1$ 的符号与 $\theta-\theta_1$ 的符号相反。当 $\theta>\theta_1$ 时, 有 $\text{Det}(J)-1<0$, 即 $\text{Det}(J)<1$ 。根据 Jury 判据, 当 $\theta_1<\theta<\theta_2$ 时, 正均衡点 E_2 局部稳定。

根据文献 [12] 可知, 当 $1+\text{Tr}(J)+\text{Det}(J)=0$ 时, 系统会经历倍周期分支, 随着参数的变化, 系统(6)最终通向混沌。

3 混沌控制

为抑制系统混沌振荡、恢复市场稳定状态, 本节通过对系统进行状态反馈控制, 将系统性态从混沌状态恢复至有序状态。在领导者企业方程中引入线性控制项

$$U(t)=u_1(q_1-q_1^*)+u_2(q_2-q_2^*).$$

受控系统为

$$\begin{cases} q_1(t+1)=q_1(t)+\theta q_1(t)[a-2q_1-dq_2-c_1q_1]-U(t), \\ q_2(t+1)=(1-v)q_2(t)+v\left(\frac{a-dq_1}{2+c_2}\right), \end{cases} \quad (8)$$

式中: u_1, u_2 为控制参数。控制系统与原系统具有相同的正均衡点 $E_2(q_1^*, q_2^*)$ 。系统(8)在 $E_2(q_1^*, q_2^*)$ 处的 Jacobian 矩阵

$$J_0(q_1^*, q_2^*) = \begin{bmatrix} 1 + \theta \left[\frac{a(2+c_1)(2+c_2-d)}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)} \right] - u_1 & -\frac{d\theta a(d-(2+c_2))}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)} - u_2 \\ -\frac{dv}{2+c_2} & 1-v \end{bmatrix}.$$

特征方程为 $\lambda^2 - \text{Tr}_0(J_0)\lambda + \text{Det}_0(J_0) = 0$, 其中

$$\begin{aligned} \text{Tr}_0(J_0) &= 2-v + \theta \left[\frac{a(2+c_1)(2+c_2-d)}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)} \right] - u_1, \\ \text{Det}_0(J_0) &= 1-v + \frac{a\theta(2+c_2-d)[(2+c_1)(2+c_2)(1-v)+vd^2]}{(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]} - (1-v)u_1 - \frac{dv}{2+c_2}u_2 = \\ &= 1-v + \theta \frac{a(2+c_1)(2+c_2-d)}{d^2-(2+c_1)(2+c_2)} - u_1 + vu_1 + \frac{\theta av(2+c_2-d)}{2+c_2} - \frac{dv}{2+c_2}u_2 = \\ &= \text{Tr}_0(J_0) - 1 + v(u_1 + \beta_1 - \alpha_1 u_2), \\ \alpha_1 &= \frac{d}{2+c_2}, \beta_1 = \frac{\theta a(2+c_2-d)}{(2+c_2)}. \end{aligned}$$

下面分析系统(8)正均衡点 $E_2(q_1^*, q_2^*)$ 的稳定性。显然当 $u_1 > \alpha_1 u_2 - \beta_1$ 时, $1 - \text{Tr}_0(J_0) + \text{Det}_0(J_0) > 0$ 。

又

$$1 + \text{Tr}_0(J_0) + \text{Det}_0(J_0) = \alpha_2 u_2 + \beta_2 - u_1,$$

这里

$$\alpha_2 = -\frac{dv}{(2-v)(2+c_2)}, \quad \beta_2 = 2 +$$

$$\frac{\theta a(2+c_2-d)[(2-v)(2+c_1)(2+c_2)+vd^2]}{(2-v)(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}.$$

故当 $u_1 < \alpha_2 u_2 + \beta_2$ 时, $1 + \text{Tr}_0(J_0) + \text{Det}_0(J_0) > 0$ 。进一步 $\text{Det}_0(J_0) - 1 = (1 -$

$$v)(\beta_3 - u_1 + \alpha_3 u_2), \text{ 其中 } \alpha_3 = -\frac{v}{(1-v)},$$

$$\beta_3 = -\frac{v}{(1-v)} +$$

$$\frac{\theta a(2+c_2-d)[(1-v)(2+c_1)(2+c_2)+vd^2]}{(1-v)(2+c_2)[d^2-(2+c_1)(2+c_2)]}.$$

由于 $1-v>0$, 因此 $\text{Det}_0(J_0)-1$ 的符号与 $\beta_3 - u_1 + \alpha_3 u_2$ 的符号相同。当 $u_1 > \alpha_3 u_2 + \beta_3$ 时, $\text{Det}_0(J_0) - 1 < 0$ 成立, 即 $\text{Det}_0(J_0) < 1$ 。

根据 Jury 判据, 控制参数满足 $\max\{\alpha_1 u_2 + \beta_1, \alpha_3 u_2 + \beta_3\} < u_1 < \alpha_2 u_2 + \beta_2$ 时, 正均衡点 $E_2(q_1^*, q_2^*)$ 回归到稳定状态。

综合以上分析, 有下面定理:

定理 2 当对原系统施加控制 $U(t)$, 且控制参数满足 $\max\{\alpha_1 u_2 + \beta_1, \alpha_3 u_2 + \beta_3\} < u_1 < \alpha_2 u_2 + \beta_2$ 时, 正均衡点 $E_2(q_1^*, q_2^*)$ 可由初始不稳定状态变为稳定状态。

4 数值模拟

本节通过数值模拟验证正均衡点稳定性计算的正确性, 进一步分析正均衡点不稳定时, 将领导者企业动态调整速度 θ 做为变化参数, 系统的动力学性态演化过程。取 $a=2, c_1=0.5, c_2=$

$0.7, d=0.5, v=0.5$, 初始值为 $(q_1(0), q_2(0)) = (0.3, 0.2)$ 。

利用 Matlab 软件首先模拟领导者企业与追随者企业产量随领导者企业产量决策调整速度 θ 变化的情况。由图 1(a) 可以看出, 当 $\theta < \theta_2 = 1.166$ 时, 均衡点局部渐近稳定; $\theta_2 = 1.166$ 时, 系统(6)发生倍周期分支; 随着 θ 的继续增加, 系统进入混沌状态。由图 1(b) 可以看出, 随着参数 θ 的增加, Lyapunov 指数由负变正, 当其变为正值时, 系统(6)将通向混沌。

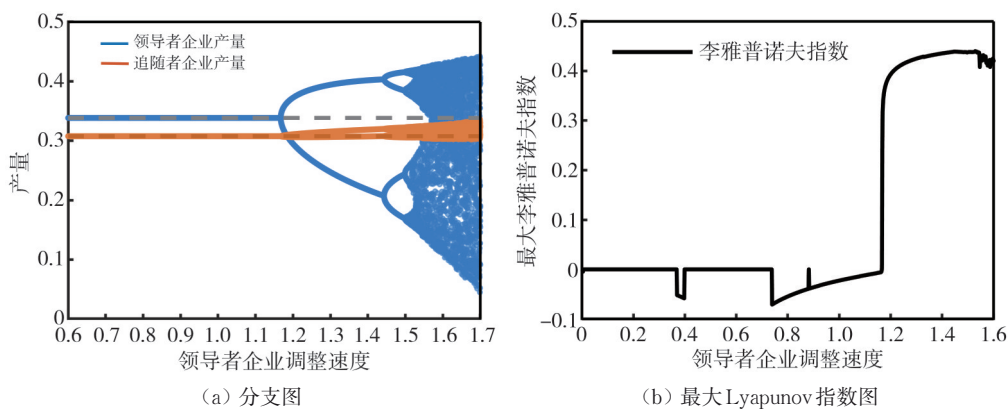


图 1 系统(6)随 θ 变化的分支图与相应的最大 Lyapunov 指数图

Fig. 1 The bifurcation diagram of the system (6) as θ varies, along with the corresponding maximum Lyapunov exponent diagram

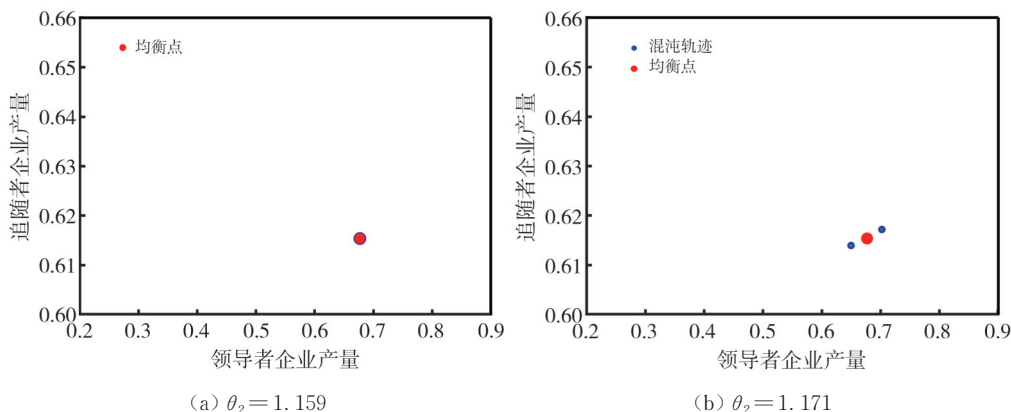
下面模拟当 θ 取不同值时系统(6)的相图(见图 2), 进一步证实系统经历倍周期分支。图 2(a) 表示平衡点 E_2 是稳定的; 图 2(b)~图 2(e) 分别发生周期 2、4、8、16 轨道; 图 2(f) 为系统进入混沌状态, 图 2 的相图说明了随着领导者企业有限理性策略调整速度的增加, 系统是如何从稳定平衡点到周期振荡, 最终进入混沌的过程。混沌吸引子的出现标志着企业演化策略进入高度不可预测状态及对初始条件的极端敏感性。

为抑制混沌行为, 取 $\theta=1.5689$, 其它参数不

变, 系统的稳定区域为三条边界线

$$L_1: u_1 = \alpha_1 u_2 + \beta_1, L_2: u_1 = \alpha_2 u_2 + \beta_2, \\ L_3: u_1 = \alpha_3 u_2 + \beta_3.$$

所围区域, 如图 3(a) 所示。在此区域内取控制参数 $u_1 = -1, u_2 = 0$, 发现系统由混沌状态(见图 3(b))变为稳定(见图 3(c)), 此时市场环境更有利于企业的长远发展。上述结果验证了通过参数调节实现混沌控制的有效性, 为引导市场回归稳定提供了可行路径。



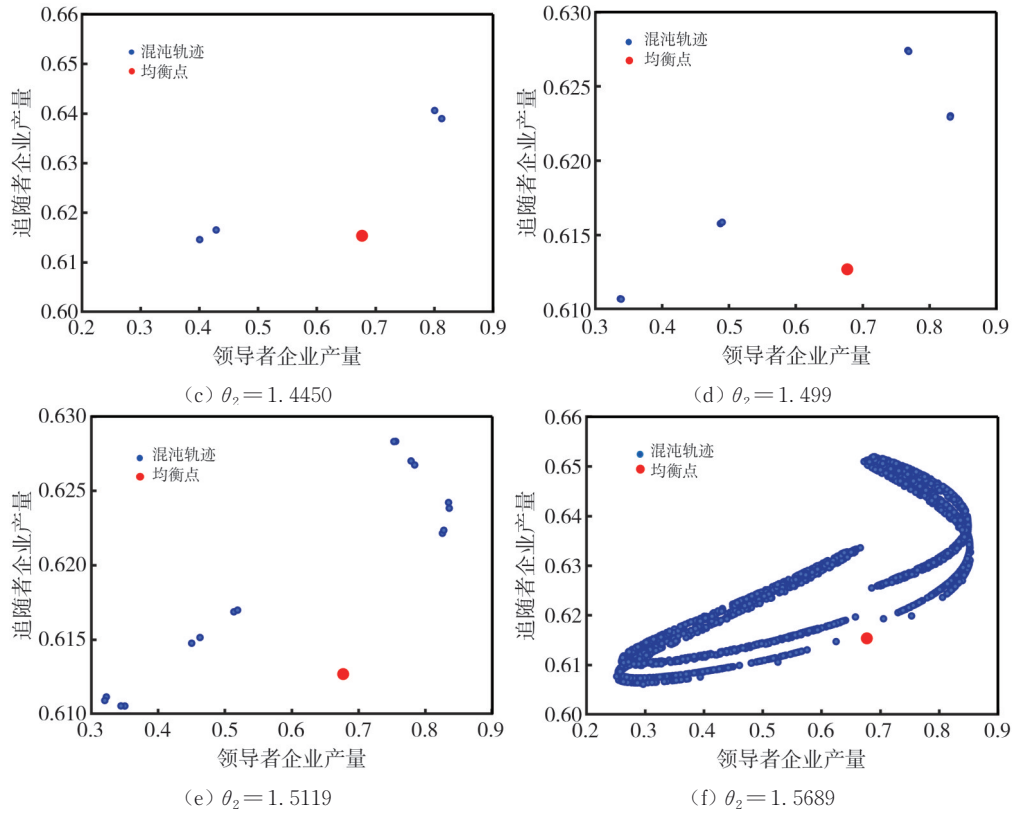


图2 系统(6)关于参数 θ 的演化过程

Fig. 2 The evolution process of the system (6) with parameter θ

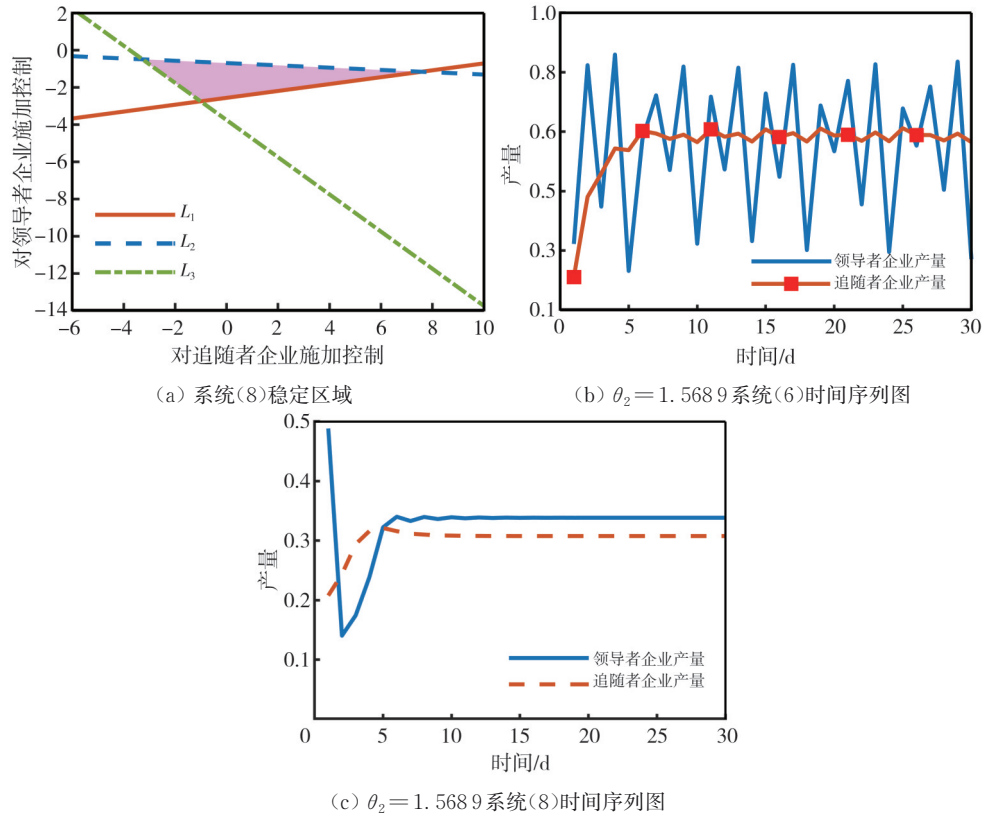


图3 在 (u_1, u_2) 中系统(8)稳定区域及当 $u_1 = -1, u_2 = 0$ 时, 系统(6)与受控系统(8)在 $\theta_2 = 1.5689$ 的演化过程

Fig. 3 The stable region of system (8) in (u_1, u_2) and the evolution process of the system (6) and the system (8) under $u_1 = -1, u_2 = 0$ with $\theta_2 = 1.5689$

5 结 论

本文建立了具有异质预期与非线性成本的 Stackelberg 双寡头博弈模型, 其中领导者采用有限理性预期, 追随者采用适应性预期。通过动力学分析发现系统始终存在一个边界均衡点和正均衡点, 又利用 Jury 判据得出了均衡点的稳定条件。数值模拟表明, 随着领导者调整速度的增大, 系统会经历从稳定状态、周期振荡直至混沌状态的演化过程, 揭示了领导企业的策略选择对市场动态具有决定性影响。领导者的策略调整速度 θ 不仅决定了其自身的产量决策路径, 更通过博弈行为显著影响追随者的策略。随 θ 的逐渐增加, 领导企业的策略波动显著加剧, 引发系统的连续分支, 最终导致整个系统的失稳。当系统进入混沌状态后, 市场行为呈现高度不可预测性和对初始条件的极端敏感性, 即使是领导者调整速度的微小变化, 也可能引发市场格局的剧烈变动, 这将严重影响企业的产量规划效率以及市场竞争秩序。为应对系统失稳风险, 本文利用状态反馈控制策略推导出使系统由混沌恢复稳定的边界条件, 并通过数值模拟验证了该方法的有效性。研究表明, 通过施加适当的控制手段, 可有效抑制混沌振荡, 使系统回归稳定状态, 从而保障市场行为的可预测性与长期稳定。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献:

- [1] 肖悦. 两类双寡头博弈模型的动力学及其随机系统研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2023.
- [2] COURNOT A A. Recherches Sur Les Principes Mathématiques De La Théorie Des Richesses [M]. Paris: Hachette, 1838.
- [3] VON STACKELBERG H. Marktform und gleichgewicht[J]. Berlin: Springer, 1934.
- [4] 赵玥茹. 多市场混合 Stackelberg 模型的动力学研究及混沌控制[D]. 绵阳: 西南科技大学, 2023.
- [5] AHMED R, KHALID A, KARAM S. Exploring complex dynamics in a Stackelberg Cournot duopoly game model[J]. Physica Scripta, 2024, 99(11): 115036.
- [6] 张力云, 黄在堂. 基于产品差异化和有限理性的 Stackelberg 双寡头博弈模型的余维 1 分岔分析[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2024, 41(3): 27-35.
- ZHANG Liyun, HUANG Zaitang. Codimension-one bifurcation analysis of a Stackelberg duopoly game model with product differentiation and bounded rationality [J]. Journal of Nanning Normal University (Natural Science Edition), 2024, 41(3): 27-35. (in Chinese)
- [7] PENG Y, LU Q. Complex dynamics analysis for a duopoly Stackelberg game model with bounded rationality [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271: 259-268.
- [8] YANG X N, PENG Y, XIAO Y, et al. Nonlinear dynamics of a duopoly Stackelberg game with marginal costs [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2019, 123: 185-191.
- [9] ASKAR S S. Duopolistic Stackelberg game: investigation of complex dynamics and chaos control [J]. Operational Research, 2020, 20(3): 1685-1699.
- [10] XIAO Y, ZHANG S G, PENG Y. Dynamic investigations in a Stackelberg model with differentiated products and bounded rationality [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2022, 414: 114409.
- [11] 董瑞. 不同理性预期下 Stackelberg 模型的动态复杂性 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(7): 1761-1767. DONG Rui. Dynamic complexity of the Stackelberg model with heterogeneous expectations [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2017, 37(7): 1761-1767. (in Chinese)
- [12] AZIOUNE M, ABDELOUAHAB M S. Controlling chaos and mixed mode oscillations in a Bertrand duopoly game with homogeneous expectations and quadratic cost functions [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2025, 233: 553-566.
- [13] ASKAR S, ALSHAMRANI A M. Dynamic analysis of a simple Cournot duopoly model based on a computed cost [J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2024, 2024(1): 9912671.
- [14] MOTOYAMA Y. A Dynamic optimization model considering cost and speed in the cobb-douglas production function [J]. Decision Analytics Journal, 2025, 14: 100535.
- [15] 田英楠, 王嘉琪, 张新立. 不同理性预期下量子库诺特模型的动态演化分析 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2021, 18(3): 45-50. TIAN Yingnan, WANG Jiaqi, ZHANG Xinli. Analysis of the dynamic evolution of the quantum cournot model under different rational expectations [J]. Complex Systems and Complexity Science, 2021, 18(3): 45-50. (in Chinese)