

文章编号: 1673-3193(XXXX)XX-0001-11

# 基于加权稀疏贝叶斯学习的矢量水听器 DOA 估计方法

路昱轩, 王 鹏\*, 谭秀辉

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

**摘 要:** 针对水下环境中, 矢量水听器阵列在低信噪比和小快拍的条件下进行波达方向 (Direction of Arrival, DOA) 估计时, 面临的估计精度受限、分辨率不足等问题, 提出了一种基于加权稀疏贝叶斯学习 (Weighted Sparse Bayesian Learning, WSBL) 的矢量水听器 DOA 估计方法。首先, 基于互质阵列理论构建矢量水听器信号接收模型, 在不增加物理阵元的前提下有效扩展了阵列孔径并提升了自由度; 其次, 在稀疏贝叶斯学习框架上引入迭代加权稀疏约束机制, 其根据超参数估计结果构建与信号强度呈逆相关的对角加权矩阵, 通过该对角加权矩阵对信号先验方差进行加权修正, 使算法在迭代过程中能自适应地对噪声方向施加惩罚并向真实信号方向聚焦, 从而显著增强了对真实信号与噪声的区分能力; 最后, 采用快速因子最大化方法替代传统的期望最大化算法交替更新超参数, 通过矩阵迹运算直接最大化边缘似然函数, 以降低计算复杂度并加快收敛速度。所提 WSBL 方法通过引入加权机制和快速求解超参数的策略, 有效解决了低信噪比下噪声对信号的干扰。仿真实验表明, 在信噪比为  $-20 \sim 10$  dB 的范围内, 以及在单信源以及多信源场景下该方法均具有更低的均方根误差, 证明其相较于传统算法具有更高的 DOA 估计精度和更强的鲁棒性。

**关键词:** 互质阵列; 稀疏贝叶斯学习; DOA 估计; 矢量水听器

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.11.0018

**引用格式:** 路昱轩, 王鹏, 谭秀辉. 基于加权稀疏贝叶斯学习的矢量水听器 DOA 估计方法[J]. 中北大学学报 (自然科学版), DOI:10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.11.0018.

Lu Yuxuan, Wang Peng, Tan Xiuhui. DOA Estimation Method for Vector Hydrophone Based on Weighted Sparse Bayesian Learning [J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), DOI:10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.11.0018.

## DOA Estimation Method for Vector Hydrophone Based on Weighted Sparse Bayesian Learning

Lu Yuxuan, Wang Peng\*, Tan Xiuhui

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** To address the issues of limited estimation accuracy and insufficient resolution in Direction of Arrival (DOA) estimation for vector hydrophone arrays under low Signal-to-Noise Ratio and small snapshot conditions in underwater environments, a DOA estimation method for vector hydrophones based on Weighted Sparse Bayesian Learning (WSBL) is proposed. First, a signal reception model for vector

**收稿日期:** 2025-11-11

**基金项目:** 山西省留学回国人员科技活动择优资助项目 (20240011)

**作者简介:** 路昱轩 (2002—), 男, 硕士生, 主要从事现代优化算法与信息处理的研究。

\* **通信作者:** 王 鹏 (1977—), 男, 教授, 博士, 主要从事智能信息处理的研究。E-mail: wpmath@nuc.edu.cn。

hydrophones is constructed based on coprime array theory, effectively expanding the array aperture and enhancing degrees of freedom without increasing the number of physical sensors. Second, an iterative weighted sparsity constraint mechanism is introduced into the Sparse Bayesian Learning framework. This mechanism constructs a diagonal weighting matrix inversely correlated with signal strength based on hyperparameter estimation results. By modifying the signal prior variance with this matrix, the algorithm adaptively penalizes noise directions and focuses on true signal directions during iteration, significantly enhancing the distinction between real signals and noise. Finally, a fast factor maximization method replaces the traditional Expectation-Maximization algorithm to alternately update hyperparameters, directly maximizing the marginal likelihood function via matrix trace operations to reduce computational complexity and accelerate convergence. The proposed WSBL method effectively mitigates noise interference under low SNR conditions through the weighting mechanism and fast hyperparameter solving strategy. Simulation results demonstrate that within the SNR range of  $-20$  dB to  $10$  dB, and in both single-source and multi-source scenarios, the method exhibits lower Root Mean Square Error, verifying its superior DOA estimation accuracy and robustness compared to traditional algorithms.

**Key words:** coprime array; sparse Bayesian learning; DOA estimation; vector hydrophone

## 0 引 言

波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计广泛应用于雷达定位, 生物医学工程以及军事等众多领域<sup>[1-2]</sup>。早期的DOA估计以常规波束形成(Conventional Beamforming, CBF)算法<sup>[3]</sup>为代表, 该算法采用各阵元接收的空域数据来对传统的时域数据进行替代, 但其分辨率受到瑞利限的约束, 无法准确分辨位于一个波束宽度内的声源目标。之后, 为使算法的分辨率有所提高, 提出了多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法<sup>[4]</sup>与旋转不变子空间算法<sup>[5]</sup>。MUSIC算法的核心在于利用子空间的正交性, 但需通过计算量较大的谱峰搜索来进行信号定位, 旋转不变子空间算法基于阵列的平移不变性, 无需进行谱峰搜索, 从而显著降低计算复杂度。另一类主流方法是子空间拟合类算法, 其典型代表是最大似然算法<sup>[6]</sup>, 尽管该算法在小快拍和低信噪比的条件下具有优异的估计性能, 但由于其涉及复杂的计算过程, 运算成本极高, 限制了其实际应用价值。

均匀线性阵列(Uniform Linear Array, ULA)因结构简单而被广泛应用<sup>[7]</sup>, 但受限于物理阵元数量, 其自由度难以提升。为突破这一限制, 互质阵列(Coprime Array)作为一种新型稀疏阵列结构被提出<sup>[8-10]</sup>。凭借其互质特性, 互质阵列能以较少的物理阵元构建虚拟阵列, 大幅扩展阵列孔径, 显著提高阵列自由度。Chen等<sup>[11]</sup>将互质阵列

结构应用于矢量水听器中, 证明了该架构在水下多源场景中具有优异的栅瓣抑制能力与更高的自由度, 为复杂水声环境下的探测提供了有效方案。

互质阵列的稀疏采样特性与压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论高度契合, 促使基于稀疏表示的DOA估计方法引起了广泛关注, 其中正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法<sup>[12]</sup>极具代表性。该算法利用信号在空域的稀疏特性, 通过贪婪迭代的方式在过完备字典中逐个筛选最优原子以重构信号。相比于最大似然算法, OMP算法避免了多维搜索, 显著降低了运算成本, 但在低信噪比及相关信源环境下, 其重构精度和鲁棒性往往难以保证。

针对贪婪算法的不足, 稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)算法<sup>[13-15]</sup>作为压缩感知范畴的参数重构算法, 其具备诸多优势。一方面, SBL作为统计优化类算法, 无需受RIP等条件限制; 另一方面, 在贝叶斯推断框架下, SBL算法能针对不同观测信号灵活选取先验分布, 从而对其概率特性进行建模。随着应用需求的不断发展, 为了能够处理多个信号源的数据, Gerstoft等<sup>[16]</sup>在SBL算法的基础上, 将其扩展到多快拍稀疏贝叶斯学习MSBL(Multiple Sparse Bayesian Learning)算法。该算法通过联合处理多个时间快拍数据, 有效利用了信号的时间相关性, 显著提升了参数估计的稳定性。为了解决传统SBL需要依赖先验信息的问题, Karimi等<sup>[17]</sup>将Jeffreys无信息先验融入SBL框架中, 极大地拓展了SBL算法的应用范围。此外, 为了进一步克服网

格限制并提升估计精度, Wei等<sup>[18]</sup>提出了一种基于网格裂变的加权稀疏贝叶斯方法, 通过设计特定的权重参数有效增强了空间谱的稀疏性。王宏妍等<sup>[19]</sup>将MSBL算法应用到矢量水听器模型中, 通过MSBL算法实现了水下环境的自适应DOA估计。然而, 现有基于MSBL的矢量水听器DOA估计算法, 在低信噪比、小快拍与多信源并存的场景下, 仍存在局限性。MSBL算法通常对所有网格点采用统一的先验分布, 这使得算法缺乏对不同信号的自适应调节能力, 在迭代时难以有效区分微弱信号与噪声, 容易导致噪声能量在稀疏重构过程中被误判为信号峰值, 从而产生伪峰或较大的估计偏差。

针对MSBL算法在低信噪比及小快拍下, 因缺乏对信号与噪声的差异化约束, 导致难以有效抑制噪声干扰并容易产生伪峰的问题, 本文提出了加权稀疏贝叶斯学习(Weighted Sparse Bayesian Learning, WSBL)算法。该算法通过在稀疏贝叶斯学习框架中引入迭代加权稀疏约束机制, 有效克服了传统方法对信号与噪声区分能力不足的问题。WSBL算法利用超参数的估计结果动态构建加权矩阵, 对信号的先验方差赋予差异化权重, 让算法在迭代过程中持续向真实信号方向聚焦, 同时对噪声方向施加惩罚, 从而强化信号与噪声的区分度。这种机制让算法在低信噪比、小快拍场景下, 逐步修正超参数估计偏差, 大幅提升复杂场景下的DOA估计精度与稳定性。

## 1 基本理论

### 1.1 互质阵列矢量水听器信号接收模型

与均匀线性阵列相比, 互质阵列可以利用更少的物理阵元数目获得更好的估计性能。如图1所示, 该阵列结构由两个均匀线阵构成, 分别记作子阵一与子阵二。子阵一包含 $M_2$ 个阵元, 阵元间距为 $M_1d$ ; 子阵二包含 $M_1$ 个阵元, 阵元间距为 $M_2d$ , 其中 $M_1$ 和 $M_2$ 互为质数( $M_2 > M_1$ ),  $d$ 为信号的半波长。由 $M_1$ 和 $M_2$ 互质的性质, 则该互质阵列中共有 $M_1 + M_2 - 1$ 个阵元。

互质阵列的阵元位置 $L$ 可表示为两个均匀子阵的并集

$$L = \{M_1nd\} \cup \{M_2md\}, \\ n = 0, 1, \dots, M_2 - 1; m = 0, 1, \dots, M_1 - 1. \quad (1)$$

将集合 $L$ 中的元素去重并按从小到大的顺序排列, 即可得到第 $i$ 个阵元的位置 $L_i$ 。

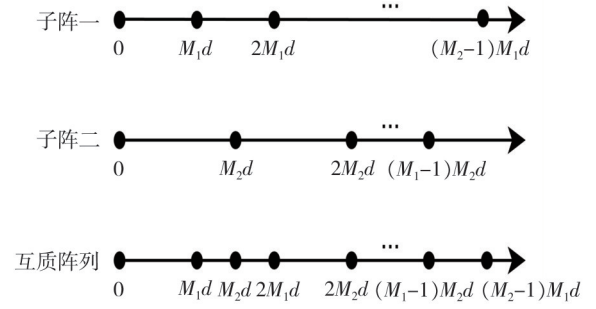


图1 互质阵列模型

Fig. 1 Comprime array model

由图1可知, 互质阵列凭借阵元间稀疏的结构, 仅需 $M_1 + M_2 - 1$ 个阵元, 就能实现 $(M_2 - 1)M_1d$ 的阵列孔径。图2是互质阵列矢量水听器信号接收模型。

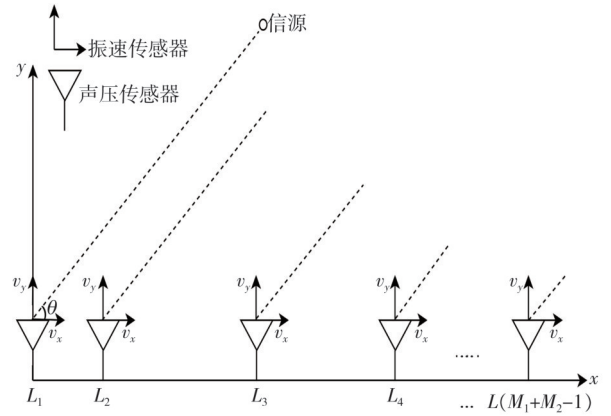


图2 互质阵列信号接收模型

Fig. 2 Comprime array signal receiving model

### 1.2 互质阵列矢量水听器信号模型的稀疏表示

假设存在 $K$ 个窄带远场信号, 分别从入射角 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ 入射至由 $M_2 + M_1 - 1$ 个矢量水听器构成的互质阵列上。为了将DOA估计问题转化为稀疏重构问题, 首先将整个DOA空域离散化, 并进行均匀采样操作, 以此可以构建一个完备的空间网格。假设 $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{N_1}]$ 是在 $[0^\circ, 180^\circ]$ 区间内均匀采样得到的网格, 其中 $N_1$ 代表网格点的数量。由于 $N_1 \gg M_2 + M_1 - 1 > K$ , 入射信号相较于该网格是稀疏的, 因此能将DOA估计问题转化为稀疏表示问题。在 $P$ 个快拍时刻内, 互质阵列接收到的信号可以表示为

$$Y = A(\theta)S + N, \quad (2)$$

式中:  $A(\theta) = (a(\theta_1) \otimes u_1, a(\theta_2) \otimes u_2, \dots, a(\theta_{N_1}) \otimes u_{N_1}) \in \mathbb{C}^{3(M_2 + M_1 - 1) \times N_1}$  表示矢量水听器阵列接收信号的完备字典矩阵, 其中

$$\mathbf{a}(\theta_k) = (a_1(\theta_k), a_2(\theta_k), \dots, a_{M_2+M_1-1}(\theta_k))^T = (1, e^{-j2\pi L_2 \sin \theta_k / \lambda}, \dots, e^{-j2\pi L_{(M_2+M_1-1)} \sin \theta_k / \lambda})^T,$$

波长 $\lambda$ 与信号频率 $f$ 的关系为 $\lambda = c/f$ ,  $c$ 表示声波在水中的传播速度,  $\otimes$ 为克罗内克积, 第 $k$ 个信号入射的方向矢量可以表示为 $\mathbf{u}_k = (1, \sin \theta_k, \cos \theta_k)^T$ ,  $\mathbf{N} = (\mathbf{n}(1), \mathbf{n}(2), \dots, \mathbf{n}(P))^T \in \mathbb{C}^{3(M_2+M_1-1) \times P}$ 表示为噪声矩阵, 阵列的输出信号可以表示为 $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(P))^T \in \mathbb{C}^{3(M_2+M_1-1) \times P}$ ,  $\mathbf{S} = (\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \dots, \mathbf{s}(P))^T \in \mathbb{C}^{N_1 \times P}$ 为入射信号的零扩展矩阵,  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_{N_1}(t))^T$ , 其中对应于真正的DOA位置 $\hat{\theta}_k$ 的第 $K$ 行非零, 其余 $N_1 - K$ 行均为零向量, 则 $\mathbf{s}$ 的第 $n$ 个元素可以表示为

$$s_n(t) = \begin{cases} s_n, & \text{若 } \hat{\theta}_n = \hat{\theta}_k, n = 1, \dots, N_1, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (3)$$

通过求解式(2), 即可恢复稀疏信号 $\mathbf{S}$ , 但由于该方程欠定导致解不唯一, 所以无法进行直接求解。故根据稀疏表示理论, 可将该过程转化为最小化 $\ell_1$ 范数的问题进行求解

$$\tilde{\mathbf{S}} = \argmin \|\mathbf{S}\|_1, \text{ s.t. } \mathbf{Y} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S} + \mathbf{N}. \quad (4)$$

## 2 基于加权稀疏贝叶斯学习的DOA估计方法

### 2.1 现有先验模型与似然函数

对于信号的先验模型, 由于信号源在空间中是稀疏的, 且信号源幅度 $\mathbf{S}$ 相较于快拍数是独立的, 假设其服从均值为0, 方差为 $\mathbf{\Lambda}$ 的高斯分布:

$$p(\mathbf{S}; \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^P \text{CN}(s(t)|0, \mathbf{\Lambda}), \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha})$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_1}]^T$ 。  $\boldsymbol{\alpha}$ 表示先验模型的方差, 其控制模型的稀疏程度, 每个分量对应网格点的信号存在概率。

假设噪声是服从均值为0, 方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声。由高斯分布的标准形式, 其概率密度函数表示为

$$p(y(t)|s(t); \sigma^2) = (\pi\sigma^2)^{-3(M_2+M_1-1)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|y(t) - \mathbf{A}s(t)\|_2^2\right), \quad (6)$$

上式表示的是单快拍情况下的似然函数, 将其推广到快拍数为 $P$ 的情况下, 有

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{S}; \sigma^2) = \prod_{i=1}^P p(y(t)|s(t); \sigma^2). \quad (7)$$

然而, 上述基于标准高斯先验的模型在低信噪比和小快拍条件下存在一定局限性。虽然该先验模型具有一定的稀疏性, 但其机制更接近于 $\ell_1$ 范数约束而非 $\ell_0$ 范数约束, 这导致了其对噪声的抑制能力存在一定的限制。

为了解决这一问题, 本文提出一种加权稀疏贝叶斯学习算法。该算法在贝叶斯分层模型中引入迭代加权稀疏约束机制, 对先验模型进行动态调整, 并结合快速因子最大化方法高效求解超参数, 从而显著提升DOA估计的精度与鲁棒性。

### 2.2 加权稀疏贝叶斯学习模型

#### 2.2.1 加权稀疏模型构建

在迭代加权稀疏约束中, 首先建立超参数与权重 $\omega_i$ 之间的映射关系。受Candès等人提出的迭代重加权 $\ell_1$ 最小化理论启发<sup>[20]</sup>, 其通过引入加权矩阵, 将最小化 $\ell_1$ 范数的问题进行优化, 可以表示为

$$\mathbf{x} = \argmin \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_1, \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Phi\mathbf{x}. \quad (8)$$

由此构建与信号强度呈逆相关的权重结构。权重计算公式定义为

$$\omega_i = \frac{1}{\alpha_i^p + \epsilon}, \quad (9)$$

式中:  $p$ 为调节因子, 该值的设定基于 $\ell_p$ 范数最小化理论, 较小的 $p$ 值能更有效地逼近 $\ell_0$ 范数极限, 从而显著增强算法的稀疏性。 $\epsilon$ 为平滑常数, 通过引入数值正则化, 既避免了当信号分量趋近于零时可能产生的奇异性, 又确保了迭代过程的数值稳定性。超参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 中各元素的范围为 $\alpha_i \in [0, 1]$ 。

利用计算出的权重 $\omega_i$ , 构造对角加权矩阵 $\mathbf{W} = \text{diag}(\boldsymbol{\omega})$ ,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N_1}]^T$ 并对原始信号矩阵 $\mathbf{S}$ 进行修正, 得到加权信号矩阵 $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{W}\mathbf{S}$ 。由此, 原有的稀疏表示模型(2)修正为

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(\theta)\tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{N}. \quad (10)$$

相应地, 稀疏表示问题修正为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \argmin \|\tilde{\mathbf{S}}\|_1, \text{ s.t. } \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(\theta)\tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{N}. \quad (11)$$

则加权信号矩阵的协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^H] &= \\ E[(\mathbf{W}\mathbf{S})(\mathbf{W}\mathbf{S})^H] &= \mathbf{W}E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]\mathbf{W}^H = \mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

加权后的方差可以表示为

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^2 = \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}), \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \left[ \frac{\alpha_1}{(\alpha_1^p + \epsilon)^2}, \frac{\alpha_2}{(\alpha_2^p + \epsilon)^2}, \dots, \frac{\alpha_{N_1}}{(\alpha_{N_1}^p + \epsilon)^2} \right]^T. \quad (13)$$

通过加权矩阵作用后,使得先验模型具备更强的稀疏约束能力。当网格点对应噪声时,其方差将加速进行衰减;而当网格点对应真实的信源时,其信号得以有效保留。这种差异化的加权约束机制,使得算法在后续的贝叶斯推断中能更精准地去除噪声,保留信号,从而显著提升低信噪比条件下的DOA估计分辨率。

### 2.2.2 似然函数与先验模型

对于加权信号后的先验模型,其服从值为0,方差为 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的高斯分布

$$p(\tilde{\mathbf{S}}; \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{t=1}^P \text{CN}(\tilde{s}(t) | 0, \tilde{\mathbf{A}}). \quad (14)$$

由于加权后的稀疏表示模型修正为式(10),则其概率密度函数表示为

$$p(\tilde{y}(t) | \tilde{s}(t); \sigma^2) = (\pi\sigma^2)^{-3(M_2+M_1-1)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{y}(t) - A\tilde{s}(t)\|_2^2\right). \quad (15)$$

上式表示的是单快拍情况下的似然函数,将其推广到快拍数为 $P$ 的情况下有

$$p(\tilde{\mathbf{Y}} | \tilde{\mathbf{S}}; \sigma^2) = \prod_{t=1}^P p(\tilde{y}(t) | \tilde{s}(t); \sigma^2). \quad (16)$$

### 2.2.3 后验分布

在给定似然函数和先验模型后, $\tilde{\mathbf{S}}$ 的后验分布可以通过贝叶斯准则得到

$$p(\tilde{\mathbf{S}} | \tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = \frac{p(\tilde{\mathbf{Y}} | \tilde{\mathbf{S}}; \sigma^2) p(\tilde{\mathbf{S}}; \boldsymbol{\alpha})}{p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)}, \quad (17)$$

其中,右侧的分母部分 $p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$ 是证据因子。对于给定初始值的 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\sigma^2$ ,证据因子转化为归一化因子,可以将其看作固定值进行忽略,化简后有

$$p(\tilde{\mathbf{S}} | \tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \propto p(\tilde{\mathbf{Y}} | \tilde{\mathbf{S}}; \sigma^2) p(\tilde{\mathbf{S}}; \boldsymbol{\alpha}) \propto \frac{e^{-\text{tr}((\tilde{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{S}}})^H \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{S}}}^{-1} (\tilde{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{S}}}))}}{(\pi^{N_i} \det \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{S}}})^P} = \text{CN}(\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{S}}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{S}}}). \quad (18)$$

由于 $p(\tilde{\mathbf{S}}; \boldsymbol{\alpha})$ 和 $p(\tilde{\mathbf{Y}} | \tilde{\mathbf{S}}; \sigma^2)$ 均为高斯分布,由高斯分布的共轭性,两个高斯分布的乘积仍服从高斯分布,则后验分布 $p(\tilde{\mathbf{S}} | \tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$ 也服从高斯分布,从而对似然函数与先验模型的概率密度函数进行乘积并进行化简后,可得其指数部分为

$$-\tilde{s}(t)^H \left( \frac{1}{\sigma^2} A^H A + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \right) \tilde{s}(t) + \frac{1}{\sigma^2} \tilde{y}(t)^H A \tilde{s}(t) +$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \tilde{s}(t)^H A^H \tilde{y}(t), \quad (19)$$

将其与 $p(\tilde{\mathbf{S}} | \tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$ 的高斯分布标准形式进行对应后,可得其后验均值和方差分别表示为

$$\boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{S}}} = E\{\tilde{\mathbf{S}} | \tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\} = \tilde{\mathbf{A}} A^H \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{S}}} = E\left\{(\tilde{s}(t) - \boldsymbol{\mu}_{\tilde{s}(t)})(\tilde{s}(t) - \boldsymbol{\mu}_{\tilde{s}(t)})^H | \tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2\right\} = \left( \frac{1}{\sigma^2} A^H A + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \right)^{-1}, \quad (21)$$

同时,对输出信号的协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ 展开得

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}} = E\{\tilde{y}(t) \tilde{y}(t)^H\} =$$

$$E[(A\tilde{s}(t) + \mathbf{n}(t))(A\tilde{s}(t) + \mathbf{n}(t))^H] = AE[\tilde{s}(t)\tilde{s}(t)^H]A^H + E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t)^H] + AE[\tilde{s}(t)\mathbf{n}(t)^H] + E[\mathbf{n}(t)\tilde{s}(t)^H]A^H. \quad (22)$$

由信号与噪声的统计独立性以及噪声的零均值特性,协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}} = E\{\tilde{y}(t) \tilde{y}(t)^H\} = \sigma^2 I_{3(M_1+M_2-1)} + A\tilde{\mathbf{A}}A^H. \quad (23)$$

由Woodbury恒等式,其逆可表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-1} = (\sigma^2 I_{3(M_1+M_2-1)} + A\tilde{\mathbf{A}}A^H)^{-1} = \sigma^{-2} I_{3(M_1+M_2-1)} - \sigma^{-2} A \left( \frac{1}{\sigma^2} A^H A + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \right)^{-1} A^H \sigma^{-2}. \quad (24)$$

若已知超参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\sigma^2$ ,由高斯分布的性质,对最大后验概率的估计就等价于估计后验均值

$$\hat{\mathbf{S}}^{\text{MAP}} = \boldsymbol{\mu}_{\tilde{\mathbf{S}}} = \tilde{\mathbf{A}} A^H \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}. \quad (25)$$

### 2.2.4 超参数估计

由贝叶斯定理,边缘似然表示在给定超参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\sigma^2$ 的情况下,观测数据 $\tilde{\mathbf{Y}}$ 的概率分布,它是通过对未知变量 $\tilde{\mathbf{S}}$ 的联合概率分布进行积分得到的

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = \int p(\tilde{\mathbf{Y}} | \tilde{\mathbf{S}}; \sigma^2) p(\tilde{\mathbf{S}}; \boldsymbol{\alpha}) d\tilde{\mathbf{S}}. \quad (26)$$

由于似然函数 $p(\tilde{\mathbf{Y}} | \tilde{\mathbf{S}}; \sigma^2)$ 和先验模型 $p(\tilde{\mathbf{S}}; \boldsymbol{\alpha})$ 均为高斯分布,根据线性高斯模型的性质,其边缘分布 $p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2)$ 依然服从高斯分布,且均值为0,协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ 。

假设 $P$ 个快拍信号在统计上相互独立,则观测矩阵的联合概率密度函数可表示为各快拍概率密度的乘积

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}; \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) = \frac{1}{(\pi^{N_i} \det \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}})^P} \exp\left\{-\sum_{t=1}^P \tilde{y}(t)^H \boldsymbol{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-1} \tilde{y}(t)\right\}. \quad (27)$$

利用矩阵迹的性质,式(27)可化简为最终的

边缘似然函数

$$p(\tilde{Y}; \alpha, \sigma^2) = \frac{\exp\{-\text{tr}(\tilde{Y}^H \Sigma_y^{-1} \tilde{Y})\}}{(\pi^{N_1} \det \Sigma_y)^P}. \quad (28)$$

对其取对数并忽略常数项,有

$$\ln p(\tilde{Y}; \alpha, \sigma^2) = -\text{tr}(\tilde{Y}^H \Sigma_y^{-1} \tilde{Y}) - P \ln(\det \Sigma_y) - N_1 P \ln \pi \propto -\text{tr}(\tilde{Y}^H \Sigma_y^{-1} \tilde{Y}) - P \ln(\det \Sigma_y). \quad (29)$$

通过将取对数后的证据因子最大化,即可得到超参数  $\alpha$  和  $\sigma^2$  的估计值。

针对模型中超参数和噪声方差的迭代更新,本文采用快速因子最大化方法。该方法通过直接最大化边缘似然函数来实现参数优化。相较于传统的期望最大化算法,快速因子最大化无需对隐变量进行复杂的期望估计,而是直接通过矩阵迹运算进行求解。这不仅保证了估计精度,更在极大程度上降低了计算复杂度并提升了算法的收敛速度。

利用快速因子最大化方法对超参数进行更新,对边缘似然函数中的超参数  $\alpha$  进行求偏导,得

$$\frac{\partial \ln p(\tilde{Y}; \alpha, \sigma^2)}{\partial \alpha_i} = -\|\tilde{Y}^H \Sigma_y^{-1} a_n\|_2^2 \frac{2P\alpha_i^P}{(\alpha_i^2 + \epsilon)^3} + Pa_n \frac{2P\alpha_i^P}{(\alpha_i^2 + \epsilon)^3} \Sigma_y^{-1} a_n^H. \quad (30)$$

由不动点迭代以及 Jaffer 条件,超参数  $\alpha$  的更新公式可以表示为

$$\alpha_i^{n+1} = \frac{\frac{\alpha_i^n}{\sqrt{P}} \|\tilde{Y}^H \Sigma_y^{-1} a_n\|_2}{\sqrt{a_n^H \Sigma_y^{-1} a_n}}. \quad (31)$$

同理,对超参数  $\sigma^2$  求偏导可得其更新公式为

$$(\sigma^2)^{j+1} = \frac{1}{N_1 - K} \text{tr}((I_{3(M_1+M_2-1)} - A_K A_K^+) S_y), \quad (32)$$

式中:  $S_y = \tilde{Y} \tilde{Y}^H / P$ , 表示数据样本的协方差,  $a_n$  表示矢量矩阵的第  $n$  列。  $A_K$  由矩阵  $A$  中对应  $\alpha$  的  $K$  个列组成,  $A_K^+ = (A_K^H A_K)^{-1} A_K^H$ ,  $I_{3(M_1+M_2-1)}$  表示  $3(M_1+M_2-1)$  阶单位矩阵。当满足  $\frac{\|\alpha^{n+1} - \alpha^n\|_1}{\|\alpha^n\|_1} \leq \tau$  时迭代过程结束。其中  $\tau$  为预设的收敛阈值,  $n$  为迭代次数。

### 2.3 算法实施流程

本文提出的 WSBL 算法通过交替更新权重矩阵与超参数,逐步聚焦真实信号方向,如算法 1 所示。

#### 算法 1 WSBL 算法

- (1) 输入:  $Y$
- (2) 初始化:  $\alpha, \sigma^2, \tau, I, \epsilon, p$
- (3) 根据互质阵列结构特性,将两个子阵的阵元位置合并
- (4) 构建加权矩阵  $W$  并作用于信号矩阵  $S$ , 得到加权后的信号模型
- (5) while  $\left(\frac{\|\alpha^{n+1} - \alpha^n\|_1}{\|\alpha^n\|_1} < \tau\right)$  and  $(n < I)$ 
  - (i) 计算  $\Sigma_y = E\{\tilde{y}(t)\tilde{y}(t)^H\} = \sigma^2 I_{3(M_1+M_2-1)} + A \tilde{A} A^H$
  - (ii) 利用式(30)与式(31),更新超参数  $\sigma^2$  与  $\alpha$
  - (iii) 根据更新后的超参数,对加权矩阵进行更新
- end while
- (6) 输出:  $\sigma^2$  与  $\alpha$
- (7) 对超参数  $\alpha$  进行谱峰搜索,得到 DOA 估计值

## 3 实验

本文所有的仿真实验是在 Windows11 操作系统下进行,处理器信息为: AMD Ryzen 5 4600U @ 2.10 GHz, RAM 为 16.00GB, 仿真软件为 Matlab R2021a。

### 3.1 实验条件

设置矢量互质阵列阵元数为 10, 其中,  $M_1 = 4$ ,  $M_2 = 7$ , 各阵元的位置为:  $[0, 4, 7, 8, 12, 14, 16, 20, 21, 24]d$ ,  $d$  为入射信号的半波长。入射角度范围为  $[0^\circ, 180^\circ]$ 。针对本文提出的 WSBL 算法,超参数  $\alpha$  的初始值为  $\alpha^{(0)} = [1, 1, \dots, 1]^T$ , 噪声方差的初始值设为  $\sigma^2 = 1$ , 调节因子  $p = 0.1$ , 平滑常数  $\epsilon = 10^{-6}$ , 在每个场景下分别进行 100 次 Monte-Carlo 实验。

算法性能通过均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)与成功率  $P$  进行评估,其定义分别为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{KC} \sum_{k=1}^K \sum_{c=1}^C (\hat{\theta}_k(c) - \theta_k)^2}, \quad (33)$$

$$P = \frac{\text{count}(|\hat{\theta}_k(c) - \theta_k| \leq 0.25)}{KC}, \quad (34)$$

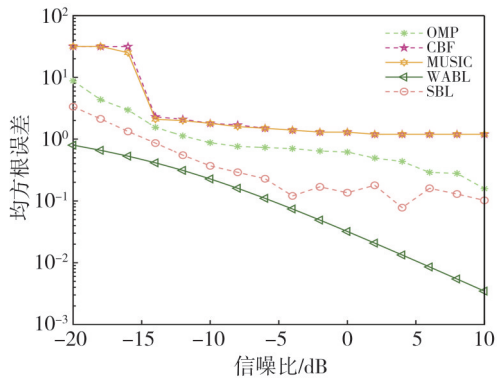
式中:  $K$  和  $C$  分别表示信源总数和蒙特卡洛试验次数;  $\hat{\theta}_k(c)$  为第  $c$  次实验中第  $k$  个信源的 DOA 估计值;  $\theta_k$  为第  $k$  个入射信号的真实角度。

为评估本文所提 WSBL 算法在 DOA 估计中的性能,将其与 SBL、OMP、MUSIC 及 CBF 算法进行对比。这些对比算法涵盖了 DOA 估计领域的经典方法,选取的具体依据如下: CBF 虽然分辨率受瑞利约束,但计算简单且稳定。将其进行对比,可

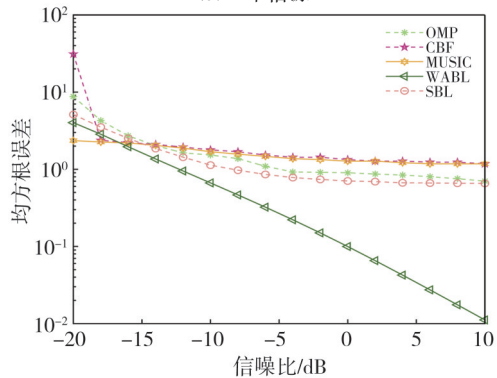
以展示WSBL算法突破瑞利限、实现高分辨估计的能力。MUSIC算法在高信噪比和大快拍数下具备优异性能,但在低信噪比及小快拍条件下性能往往急剧下降。选取该算法可以验证WSBL在恶劣环境下相较于经典高分辨算法所具备的鲁棒性。OMP利用信号空域稀疏性重构信号,但缺乏概率统计特性,在低信噪比下重构精度受限。对比该算法可突显WSBL算法在处理噪声干扰和提升估计精度方面的优势。SBL采用均匀先验,难以有效区分弱信号与噪声。通过与SBL直接对比,能够证明本文引入的迭代加权稀疏约束机制在抑制伪峰、提升信号分辨能力方面的有效性。

### 3.2 不同信噪比下的比较

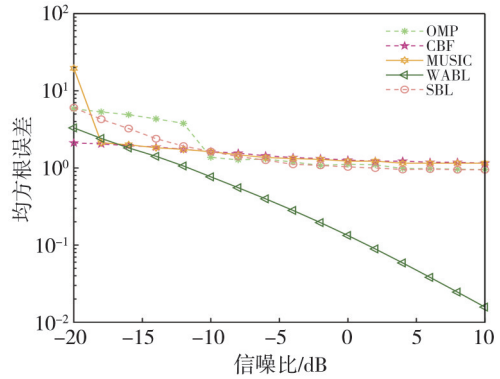
本实验中,设置快拍数为10,信噪比范围为 $-20\sim 10$  dB,以2 dB为步长进行递增。具体实验条件如下:单信源情况,入射角为 $60^\circ$ ,频率为1 000 Hz;2个信源情况,入射角分别为 $60^\circ$ 与 $90^\circ$ ,对应频率为1 000 Hz与1 200 Hz,3个信源情况,入射角分别为 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 与 $120^\circ$ ,对应频率为1 000、1 200与1 400 Hz。图3呈现了在不同信源数目下,WSBL、SBL、OMP、MUSIC及CBF这五种算法的均方根误差随信噪比变化的曲线。



(a) 1个信源



(b) 2个信源



(c) 3个信源

图3 不同信源数RMSE随信噪比变化曲线

Fig. 3 The variation curve of RMSE with signal-to-noise ratio under different sound sources

从图3可以明显看出,在单信源以及多信源条件下,各算法的均方根误差均随信噪比的提升而呈现下降的趋势。其中,WSBL算法在 $-20$  dB到 $10$  dB的信噪比范围内,其RMSE明显低于SBL、OMP、MUSIC及CBF算法。无论是单信源还是多信源场景下,WSBL算法均方根误差随信噪比提升而下降的幅度最大。原因在于其自适应的动态调节机制,可以将信号向真实方向进行聚焦。综上所述,在信噪比为 $[-20$  dB,  $10$  dB]的区间内,无论是单信源还是多信源的条件,WSBL算法的DOA估计精度均优于其他对比算法,随着信噪比的升高,该算法的所带来的性能优势也得到进一步的扩大。WSBL算法的显著优势不仅源于其迭代加权机制,更得益于矢量水听器能够同步获取声压与振速信息的物理特性。在此基础上,WSBL利用加权稀疏约束充分挖掘这些矢量信息,从而在低信噪比环境下也能精准聚焦真实信源,实现优于传统算法的估计精度。

### 3.3 不同快拍数下的比较

本实验中,设置信噪比为 $-10$  dB,以5为步长,快拍数从2增至47。具体实验条件如下:单信源情况,入射角为 $60^\circ$ ,频率为1 000 Hz;2个信源情况,入射角分别为 $60^\circ$ 与 $90^\circ$ ,对应频率为1 000 Hz与1 200 Hz;3个信源情况,入射角分别为 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 与 $120^\circ$ ,对应频率为1 000、1 200与1 400 Hz。图4展示了WSBL、SBL、OMP、MUSIC及CBF五种算法在单信源,2个信源,3个信源条件下DOA估计均方根误差随快拍数变化的对比曲线。

从图4的实验结果可以看到,在信噪比固定

为-10 dB的条件下,WSBL算法的均方根误差随快拍数增加而降低,显著优于其他算法。特别值得注意的是,WSBL算法的估计精度随快拍数的影响较小。但在快拍数极小时,由于观测数据量的不足,导致超参数的初始估计偏差较大,使得其RMSE有所增加。

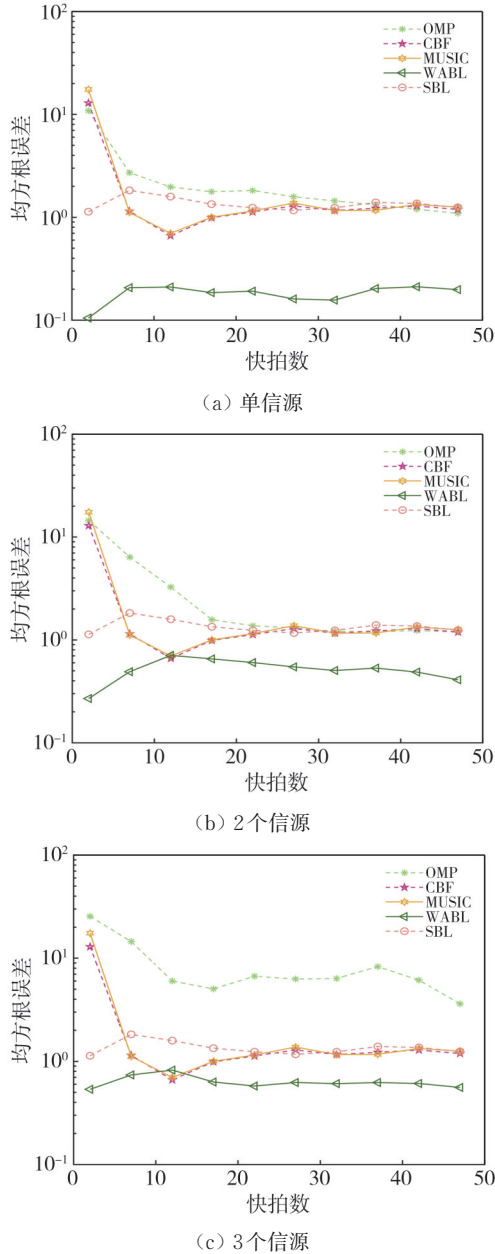


图4 不同信源数RMSE随快拍数变化曲线  
Fig. 4 The variation curve of RMSE with the number of snapshots from different sources

但随着快拍数的不断增加,超参数估计将趋于稳定,RMSE随之下降。WSBL算法在小快拍条件下的优异性能主要归因于其超参数的自适应调整能力。这些超参数能够基于不同的信号环境

和条件进行优化,从而确保算法在各种场景下实现最佳估计性能。WSBL算法能够在一定程度上有效地抑制噪声干扰,在有限的观测数据条件下提供准确可靠的DOA估计结果。综上所述,无论是单信源还是多信源的情况,本文所提出的WSBL算法都优于其它算法。

### 3.4 不同信噪比下的成功率比较

除了估计精度,算法在不同噪声下的成功率是评估其可靠性与鲁棒性的另一核心指标。为了评估算法对信号的正确分辨能力,本实验中设置快拍数为10,信噪比为-10~20 dB,以2 dB为步长进行递增。具体实验条件如下:入射角分别为 $60^\circ$ 与 $90^\circ$ ,对应频率为1 000 Hz与1 200 Hz。图5展示了WSBL、SBL、OMP、MUSIC及CBF五种算法在2个信源的条件下成功率随信噪比变化的曲线。

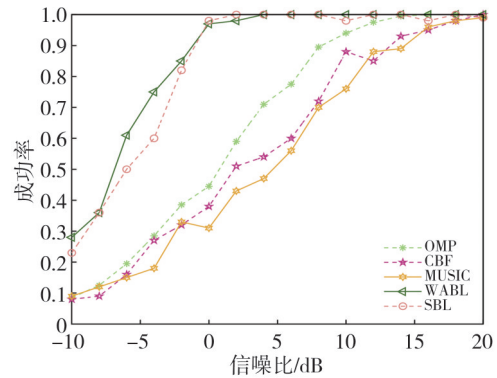


图5 成功率随信噪比变化曲线

Fig. 5 Curves of success rate varying with signal-to-noise ratio

从图5中可以明显看出,这五种算法的成功率都随着SNR的增加而增加。此外,WSBL算法在高信噪比的条件下的成功率均优于其他四种算法,充分证明了WSBL算法在复杂环境下准确处理信号的能力。该结果表明,即使在面对显著噪声干扰时,WSBL算法也能保持高精度。综上所述,本文提出的WSBL算法优于其他四种算法。

### 3.5 不同分辨率下的比较

本实验中,设置快拍数为10,信噪比为0 dB,相邻信号源之间的角度差 $s$ 以1为步长逐渐增长到10。具体实验条件如下:3个信源情况,入射角分别为 $30^\circ$ 、 $(30+s)^\circ$ 与 $(30+2s)^\circ$ ;4个信源情况,入射角分别为 $30^\circ$ 、 $(30+s)^\circ$ 、 $(30+2s)^\circ$ 与 $(30+3s)^\circ$ 。图6展示了WSBL、SBL、OMP、MUSIC

及CBF五种算法在3个信源以及4个信源的条件  
下均方根误差随此角度差变化的对比曲线。

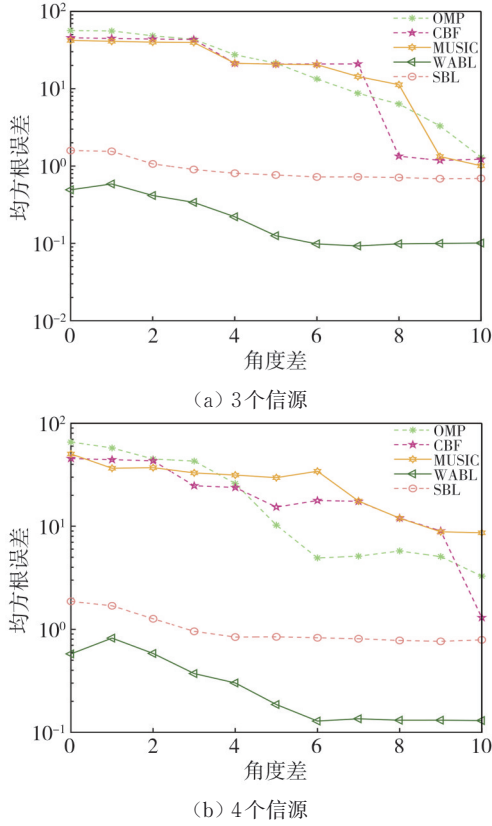


图6 不同信源数RMSE随角度差变化曲线

Fig. 6 Curves of RMSE varying with Angle difference under different numbers of sources

根据图6的实验结果,随着相邻信号源之间的角度差逐渐增大,四种算法的均方根误差都呈现出明显的下降趋势。在角度差变化的整个过程中,WSBL算法始终显示出显著的优势。WSBL算法依赖于空间网格来稀疏地表示信号,当角度差很小时,多个信号源可能落在相邻网格点上,导致信号在稀疏表示中被合并,多个信号被视为一个,从而增大估计误差。但随着角度差的增大,信号方向的区分更加明显,使得超参数估计更容易区分不同信号,最终使得RMSE不断降低。WSBL算法能够有效地处理稀疏信号,抑制噪声,提高分辨率,从而为DOA估计提供更准确、更稳定的结果。综上所述,在处理相邻信号的DOA估计问题时,WSBL算法比SBL、OMP、MUSIC和CBF算法更具有显著的优势。

### 3.6 算法复杂度分析及实验

为了全面评估算法的实用性,本文对各算法的计算复杂度进行了对比。假设互质阵列的物理

阵元数为 $M$ ,  $M = M_2 + M_1 - 1$ ,  $I_{WSBL}$ 与 $I_{SBL}$ 分别为WSBL算法与SBL算法的迭代次数。表1所示为各算法的计算复杂度。

表1 各算法的计算复杂度

Tab. 1 The computational complexity of each algorithm

| 算法    | 计算复杂度                              |
|-------|------------------------------------|
| WSBL  | $O(M^2P + I_{WSBL}(M^3 + N_1M^2))$ |
| SBL   | $O(M^2P + I_{SBL}(M^3 + N_1M^2))$  |
| OMP   | $O(N_1MK)$                         |
| MUSIC | $O(M^2P + M^3 + N_1M^2)$           |
| CBF   | $O(M^2P + N_1M^2)$                 |

上述对比算法中OMP与SBL算法与本文所提WSBL算法均为稀疏重构类算法,因此主要对比WSBL、SBL、OMP算法的执行效率。本实验从DOA估计误差和运行时间这两方面进行考量。具体实验条件如下:信噪比为0dB,信源数为3,快拍数分别为30、50、100,计算各算法的DOA估计均方误差和算法平均时间。实验结果如表2所示。

表2 算法均方根误差及执行时间

Tab. 3 Mean square error of the algorithm and execution time

| 算法   | 快拍数/个 | 均方根误差 | 平均执行时间/s |
|------|-------|-------|----------|
| WSBL | 30    | 0.63  | 1.29     |
|      | 50    | 0.42  | 1.59     |
|      | 100   | 0.31  | 2.27     |
| SBL  | 30    | 0.98  | 1.14     |
|      | 50    | 0.86  | 1.47     |
|      | 100   | 0.75  | 2.05     |
| OMP  | 30    | 1.31  | 0.25     |
|      | 50    | 1.12  | 0.47     |
|      | 100   | 1.02  | 0.87     |

由表2可以看出在各个快拍数下WSBL算法的均方根误差均最低,估计精度最高;OMP算法的平均执行时间最短,执行速度最快。SBL算法和WSBL算法的平均执行时间处于同一数量级,但均显著高于OMP算法。WSBL算法由于采用了加权迭代机制,执行效率略低于SBL算法,耗费时间最长。随着信号快拍数增加,三种算法的耗费时间均呈现增加趋势。综合来看,本文提出的WSBL算法虽然计算耗时略高,但在估计精度上显著优于同类算法。

## 4 结论

本文在稀疏贝叶斯算法的基础上,提出基于加权稀疏贝叶斯学习的矢量水听器DOA估计方

法,该方法引入迭代加权稀疏约束机制,通过动态构建并更新对角加权矩阵,作用于信号矩阵,实现对信号方向的强化与噪声干扰的抑制。本文选择互质阵列作为阵列结构,利用其稀疏特性扩展了阵列孔径,并对于信号功率超参数 $\alpha$ 的更新过程中,引入了迭代加权矩阵,有效的解决了DOA估计精度不足与伪峰存在的问题。通过大量的实验和分析,显示出WSBL算法具有明显的优势和特点,尤其是在低信噪比与小快拍的环境下均表现出更低的均方根误差和更高的成功率。

综上所述,本文通过将互质阵列的结构优势与加权稀疏贝叶斯学习算法相结合,有效解决了DOA估计精度不足的难题,为水声信号处理领域提供了性能更优、鲁棒性更强的解决方案,具有一定的理论研究价值与应用前景。未来的工作将致力于将该方法扩展到宽带信号处理及非高斯噪声环境下的DOA估计中。此外,计划结合实际水域开展实验,在真实复杂的水声信道和多径干扰环境下,进一步验证所提算法的实用性与泛化能力。

### 利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

### 参考文献:

- [1] RUAN N J, WANG H, WEN F Q, et al. DOA estimation in B5G/6G: Trends and challenges [J]. *Sensors*, 2022, 22(14): 5125.
- [2] ZHANG S M, AHMED A, ZHANG Y D, et al. Enhanced DOA estimation exploiting multi-frequency sparse array [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 5935-5946.
- [3] CHAI Y Q. Advanced techniques in adaptive beamforming for enhanced DOA estimation [C]//2024 International Wireless Communications and Mobile Computing (IWCMC). IEEE, 2024: 269-273.
- [4] SHMUEL D H, MERKOFER J P, REVACH G, et al. Deep root music algorithm for data-driven DOA estimation [C]//ICASSP 2023-2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2023: 1-5.
- [5] BENSALAM M, BARKAT O. DOA estimation of linear dipole array with known mutual coupling based on ESPRIT and MUSIC [J]. *Radio Science*, 2022, 57(2): 1-15.
- [6] ORLANDO D, RICCI G. A comparative analysis of ML-based DOA estimators [C]//2023 IEEE 10th International Workshop on Metrology for AeroSpace (MetroAeroSpace). IEEE, 2023: 385-388.
- [7] YE Z F, DAI J S, XU X, et al. DOA estimation for uniform linear array with mutual coupling [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, 45(1): 280-288.
- [8] ZHANG Y D, QIN S, AMIN M G. DOA estimation exploiting coprime arrays with sparse sensor spacing [C]//2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014: 2267-2271.
- [9] ZHOU C W, GU Y J, FAN X, et al. Direction-of-arrival estimation for coprime array via virtual array interpolation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(22): 5956-5971.
- [10] ZHENG W, ZHANG X F, WANG Y F, et al. Padded coprime arrays for improved DOA estimation: Exploiting hole representation and filling strategies [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 4597-4611.
- [11] CHEN X, ZHANG H, GAO Y, et al. DOA estimation of underwater acoustic co-frequency sources for the coprime vector sensor array [J]. *Frontiers in Marine Science*, 2023, 10: 1211234.
- [12] 窦慧晶, 谢东旭, 郭威, 等. 基于改进的正交匹配跟踪算法的波达方向估计 [J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2024, 54(12): 3568-3576.
- DOU Huijing, XIE Dongxu, GUO Wei, et al. Direction of arrival estimation based on improved orthogonal matching pursuit algorithm [J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2024, 54(12): 3568-3576. (in Chinese)
- [13] DAI J S, BAO X, XU W C, et al. Root sparse Bayesian learning for off-grid DOA estimation [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(1): 46-50.
- [14] ZHANG Z L, RAO B D. Recovery of block sparse signals using the framework of block sparse Bayesian learning [C]//2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). IEEE, 2012: 3345-3348.
- [15] LIU Z M, HUANG Z T, ZHOU Y Y. An efficient maximum likelihood method for direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(10): 1-11.
- [16] GERSTOFT P, MECKLENBRÄUKER C F, XENAKI A, et al. Multisnapshot sparse Bayesian learning for DOA

- [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(10): 1469-1473.
- [17] KARIMI M, ZARE M, DERAKHTIAN M. Sparse bayesian learning with jeffreys' noninformative prior for off-grid doa estimation [J]. Signal Processing, 2025, 230: 109809.
- [18] WEI S, LU J Y. Weighted sparse Bayesian method for direction of arrival estimation based on grid fission [J]. IET Signal Processing, 2023, 17(4): e12187.
- [19] WANG H Y, BAI Y P, REN J, et al. DOA estimation method for vector hydrophones based on sparse Bayesian learning[J]. Sensors, 2024, 24(19): 6439.
- [20] CANDÈS E J, WAKIN M B, BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted  $\ell_1$  minimization[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5/6): 877-905.
- [21] TIPPING M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. Journal of Machine Learning Research, 2001, 1: 211-244.
- [22] 乔淑慧,王立府,禹秀梅,等. 基于迭代收缩阈值算法的DOA估计方法[J]. 测试技术学报, 2024, 38(5): 559-566.
- QIAO Shuhui, WANG Lifu, YU Xiumei, et al. DOA Estimation Method Based on Iterative Shrinkage Threshold Algorithm [J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2024, 38(5): 559-566. (in Chinese)