

带有对数项的临界 Kirchhoff-Choquard 方程解的存在性和多重性

郭晶晶, 桑彦彬*, 马季

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 临界非局部的 Choquard 方程可用来描述静态极化子理论, 也可作为自引力模型描述单个粒子在自引力场中的运动规律。近年来, 研究 Choquard 方程解的存在性与多重性以及相关性质成为了非线性分析领域的热点问题。本文研究了一类带有对数项的临界 Kirchhoff-Choquard 方程解的存在性。首先, 对 Hardy-Littlewood-Sobolev 指数进行分类, 为了克服由于临界指数带来的非紧性嵌入, 引入适当的截断函数。其次, 由于对数项符号的不确定性以及对数项不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 型条件, 导致验证 PS (Palais-Smale) 序列的有界性变得困难, 故利用集中紧性原理得到局部的 PS 条件, 借助对称山路引理, 建立了该问题的无穷多个解的存在性定理。最后, 在适当球(函数空间的一个约束区域)上考虑负能量的局部极小解的存在性, 进而对参数施加附加条件, 证明了该局部极小解也是基态解。本文结果推广了相关文献中关于 Kirchhoff-Choquard 方程或对数方程的研究, 分析了 Kirchhoff 算子及对数扰动项中的参数和 Hardy-Littlewood-Sobolev 嵌入常数对解的个数的影响。

关键词: Kirchhoff-Choquard 方程; 临界指数; 对数项扰动; 截断函数; 对称山路引理

中图分类号: O175

文献标识码: A

doi: 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2025.04.0017

引用格式: 郭晶晶, 桑彦彬, 马季. 带有对数项的临界 Kirchhoff-Choquard 方程解的存在性和多重性[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2026, 47(3): 406-414.

GUO Jingjing, SANG Yanbin, MA Ji. Existence and multiplicity of solutions for critical kirchhoff-choquard type equation with logarithmic perturbation[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2026, 47(3): 406-414.

Existence and Multiplicity of Solutions for Critical Kirchhoff-Choquard Type Equation with Logarithmic Perturbation

GUO Jingjing, SANG Yanbin*, MA Ji

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The critical nonlocal Choquard equation can be used to describe the theory of the polaron at rest, and can also be used as a self-gravitational model to describe the motion of a single particle in the self-gravitational field. In recent years, the study of the existence, multiplicity and related properties of solutions of Choquard equations has become a hot issue in the field of nonlinear analysis. This paper studied the existence of solutions for a class of critical Kirchhoff-Choquard equations with logarithmic term. Firstly, the Hardy-

收稿日期: 2025-04-22

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(202103021224198)

作者简介: 郭晶晶(1996—), 女, 硕士生, 主要从事偏微分方程的研究。

* 通信作者: 桑彦彬(1979—), 男, 副教授, 博士, 主要从事偏微分方程的研究。E-mail: sangyanbin@126.com。

Littlewood-Sobolev exponent was classified and an appropriate truncation function was introduced to overcome the lack of compactness of the embedding caused by the critical exponent. Secondly, it was difficult to verify the boundedness of the PS (Palais-Smale) sequence due to the uncertainty of the logarithmic term and the fact that the logarithmic term does not satisfy the Ambrosetti-Rabinowitz type condition. Therefore, the local PS condition was obtained by using the concentration compactness principle, and the existence theorem of infinitely many solutions of the problem was established by means of the symmetric mountain pass lemma. Finally, the existence of the local minimal solution with negative energy was considered on the appropriate sphere (a constrained region of function space), and then the additional conditions were applied to the parameters. It is proved that the local minimal solution is also the ground state solution. The results of this paper extend the research on Kirchhoff-Choquard equation or logarithmic equation in the relevant literature, and analyze the influence of the parameters in the Kirchhoff operator and the logarithmic perturbation term and Hardy-Littlewood-Sobolev embedding constants on the number of solutions.

Key words: Kirchhoff-Choquard equation; critical exponent; logarithmic term perturbation; truncation function; symmetric mountain pass lemma

0 引言

本文研究具有对数扰动的临界 Kirchhoff-Choquard 型椭圆方程

$$\begin{cases} -\left(1+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda u + \omega u \log u^2 + \\ \left(\int_{\Omega} \frac{|u|^{2^*}}{|x-y|^{\mu}} dy\right)|u|^{2^*-2}u, & x \in \Omega, \\ u=0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

式中: Ω 是 $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; $b > 0$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $\omega < 0$; $2^*_{\mu} = \frac{2N-\mu}{N-2}$ 是 Hardy-Littlewood-Sobolev 临界指数。

Kirchhoff 方程通常描述弹性杆或弹性系统运动, 广泛应用于结构力学、材料科学, 以及非线性波动理论中。Choquard 方程是一类重要的椭圆型偏微分方程, 在诸多领域有着非常广泛的应用, 例如量子力学、激光束物理学以及多粒子物理系统等^[1-2], 因此该方程受到了众多学者的广泛关注^[3-6]。Duan 等^[7]研究了有界区域上临界 Choquard 方程的 Kirchhoff 型问题

$$\begin{cases} -\left(1+b\|u\|^2\right)\Delta u = \\ \left(\int_{\Omega} \frac{u^2(y)}{|x-y|^4} dy\right)u + \lambda u, & x \in \Omega, \\ u=0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 5$) 是光滑有界域, $\|\cdot\|$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的标准范数。在对常数 $b \geq 0$ 施加一定假

设下, 证明了当 $0 < \lambda \leq \lambda_1$ 时问题(2)解的存在性, 其中 $\lambda_1 > 0$ 是 Ω 上 $-\Delta$ 的第一特征值。此外, 还证明了当 $\lambda > \lambda_1$ 和 $b > 0$ 时, 在适当区间内解的多重性。对于带有 Sobolev-Hardy-Littlewood 临界指数的 Kirchhoff-Choquard 型问题, Fei 等^[8]研究了如下含有线性扰动的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda u + \\ \mu(I_a * |u|^p)|u|^{p-2}u + \omega|u|^4u, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u > 0, \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 = m^2, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3)$$

式中: $a, b, m, \mu, \omega > 0$; $\alpha \in (0, 3)$; $p \in \left(2, \frac{7+\alpha}{3}\right)$;

$\lambda \in \mathbb{R}$; I_a 为 Riesz 势。利用逼近方法和 Schwartz 对称化重排, 证明了问题(3)的正规化基态解的存在性。对于带有 Schrödinger 项和对数项的 Kirchhoff-Choquard 型问题, 徐武波等^[9]考虑了如下方程解的存在性

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + V(x)u = \lambda u \log|u| + \\ \beta\left(\int_{\Omega} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{\mu}} dy\right)|u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u=0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 光滑有界; $a > 0$, $b \geq 0$, $N \geq 3$; λ, β 为正实参数; $2 < p < 2^*_{\mu}$, 2^*_{μ} 为 Sobolev-Hardy-Littlewood 临界指数, 利用山路引理和 PS 条件得出了问题(4)至少存在一个非平凡解。

对于不含对数项的 Kirchhoff-Choquard 型问题, Liang 等^[10]研究了具有临界指数的 Choquard-Kirchhoff 型方程, 利用第二集中紧性原理证明了 PS 条件的存在性, 再利用变分方法得到了问题的多重解。Wang^[11]研究了离散的 Kirchhoff-Choquard 方程, 通过变分方法得到问题非平凡解和基态解的存在性。Gao 等^[12]研究了具有临界非线性项的 Choquard 方程正规化解的存在性问题, 利用截断函数证明了正规化解的多重性。近年来, 越来越多的数学工作者研究 Kirchhoff-Choquard 型问题^[13-15]。

受上述工作的启发, 本文主要研究非局部项、临界非线性项和对数项之间的相互作用对问题(1)弱解的存在性和多重性的影响。由于对应问题(1)能量泛函的几何结构随着 Hardy-Littlewood-Sobolev 指数的变化将发生显著变化, 因此分两种情况讨论, 即, $2_\mu^* = 2$, $1 < 2_\mu^* < 2$ 。对于 $2_\mu^* = 2$ 的情形, 当 $bS_{H,L}^2 - 1 \geq 0$ 时, 能量泛函在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强制的, 并且满足全局 PS 条件。利用对称山路引理, 对 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\omega < 0$, 得到了问题(1)的无穷多个解的存在性。当 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$ 时, 能量泛函的性质发生变化。该能量泛函并非下方有界的, 并且不满足全局 PS 条件。为了克服这些困难, 首先在临界项上引入适当的截断函数, 应用集中紧性原理得到局部 PS 条件。利用对称山路引理, 得到了问题(1)的无穷多个解的存在性。对于 $1 < 2_\mu^* < 2$ 的情形, 临界 Hardy-Littlewood-Sobolev 指数严格小于 2, 再加上对数项的符号不确定以及对数项不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 型条件, 使得 PS 序列的紧性证明变得困难。通过对能量泛函结构的分析, 证明问题(1)有局部极小解。通过对参数施加附加条件, 证明了它也是一个基态解。

1 主要结果

定理 1 若 $2_\mu^* = 2$, 并且以下条件之一成立:

- 1) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega < 0$ 且 $bS_{H,L}^2 - 1 \geq 0$;
- 2) $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$ 且 $(b, \lambda, \omega) \in C_0$,

其中,

$$C_0 = \left\{ (b, \lambda, \omega) : b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0, \right. \\ \left. \frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{1-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| > 0 \right\},$$

则问题(1)存在解序列 $\{u_k\}$, 满足 $I(u_k) \leq 0$, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ 。这里的 I 由式(6)给出。

定理 2 若 $1 < 2_\mu^* < 2$ 且 $(b, \lambda, \omega) \in D_0$, 其中

$$D_0 = \left\{ (b, \lambda, \omega) : b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0, \right. \\ \left. \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \right) b^{\frac{2_\mu^*}{2_\mu^*-2}} (S_{H,L}^{2_\mu^*})^{\frac{2}{2_\mu^*-2}} + \frac{\omega}{2} e^{\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| > 0 \right\},$$

则问题(1)存在一个负能量的局部极小解, 且该局部极小解也是基态解。

2 预备知识

贯穿全文, 将使用 $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) 表示 $L^p(\Omega)$ 范数。Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 具有范数 $\|\cdot\| := \|\nabla \cdot\|_2$, 其对偶空间用 $H^{-1}(\Omega)$ 表示。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 和 $H^{-1}(\Omega)$ 之间的对偶积。对于 Banach 空间 B , 分别用 $\rightarrow$ 和 $\rightharpoonup$ 表示强收敛性和弱收敛性。符号 $|\Omega|$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中 Ω 的勒贝格测度。符号 $O(t)$ 表示 $\left| \frac{O(t)}{t} \right| \leq C(t \rightarrow 0)$, $o_n(1)$ 是 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小。大写字母 C 表示通用的正常数。 $S_{H,L}$ 表示 Hardy-Littlewood-Sobolev 最佳嵌入常数, 即

$$S_{H,L}(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{u^{2_\mu^*}(x) u^{2_\mu^*}(y)}{|x-y|^\mu} dx dy \right)^{(N-2)/(2N-\mu)}} \quad (5)$$

定义 1 (弱解) 若满足

$$\begin{aligned} & (1 + b \|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx - \\ & \lambda \int_\Omega u \phi dx - \omega \int_\Omega u \phi \log u^2 dx - \\ & \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*-1} \phi(y)}{|x-y|^\mu} dx dy = 0, \\ & \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

则函数 $u \in H_0^1(\Omega)$ 被称为问题(1)的弱解。

用 $I(u)$ 和 $I'(u)$ 分别表示与问题(1)相关的能量泛函及其 Fréchet 导数, 即 $\forall u, \phi \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} I(u) = & \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{\lambda}{2} \|u\|_2^2 + \frac{\omega}{2} \|u\|_2^2 - \\ & \frac{\omega}{2} \int_\Omega u^2 \log u^2 dx - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \langle I'(u), \phi \rangle = & (1 + b \|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \\ & \lambda \int_{\Omega} u \phi \, dx - \omega \int_{\Omega} \int_{\Omega} u \phi \log u^2 \, dx - \\ & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2_s^*} |u(y)|^{2_s^*-1} \phi(y)}{|x-y|^\mu} \, dx dy. \end{aligned}$$

众所周知, $I(u)$ 是定义合理的, 并且是 $H_0^1(\Omega)$ 中的 C^1 泛函. I 的每一个临界点对应问题(1)的一个弱解. 由于 $I(u) = I(|u|)$, 可以假设 $u \geq 0$.

定义 2^[16] 设 E 是一个实 Banach 空间, 并且 $\mathcal{E}$ 表示集合 $A \in E \setminus \{0\}$ 的族, 使得 A 是 E 的闭子集且关于 0 对称, 即 $x \in A$ 意味着 $-x \in A$. 对 $A \in \mathcal{E}$, 用最小整数 k (记为 $\gamma(A) = k$) 定义 A 的亏格, 使得存在从 A 到 $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ 的奇连续映射. 若不存在这样的有限 k , 则设 $\gamma(A) = +\infty$. 最后, 设 $\gamma(\emptyset) = 0$. 此外, 令 $\mathcal{E}_k$ 表示 E 的闭对称子集 A 的族, 使得 $0 \notin A$ 且 $\gamma(A) \geq k$.

为了处理对数型非线性 $u \log u^2$, 需要下列基本不等式和对数项的收敛性.

引理 1^[17]

1) 对于所有 $t > 0$, 有

$$t \log t \geq -\frac{1}{e}. \quad (7)$$

2) 对于任意 $\delta, \sigma > 0$, 存在常数 $C_{\delta, \sigma}$, 使得

$$|\log t| \leq C_{\delta, \sigma} (t^\delta + t^{-\sigma}), \quad \forall t > 0. \quad (8)$$

3) 对于任意 $\delta > 0$, 有

$$\frac{\log t}{t^\delta} \leq \frac{1}{\delta e}, \quad \forall t > 0. \quad (9)$$

引理 2^[18] 设 $\{u_n\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界序列, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$ 在 Ω 上处处成立, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n^2 \log u_n^2 \, dx = \int_{\Omega} u^2 \log u^2 \, dx, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \phi \log u_n^2 \, dx = \\ \int_{\Omega} u \phi \log u^2 \, dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (11)$$

3 定理 1 的证明

3.1 $bS_{H,L}^2 - 1 \geq 0$ 的情况

由文献[19]的定理 1.3, 可证得引理 3~5.

引理 3 若 $bS_{H,L}^2 - 1 \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\omega < 0$, 则 $I(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强制的, 即 $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} I(u) = +\infty$.

引理 4 若 $bS_{H,L}^2 - 1 \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\omega < 0$, 则

$I(u)$ 满足全局 PS 条件, 即任意满足 $I(u_n)$ 是有界的, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $I'(u_n) \rightarrow 0$ 的序列 $\{u_n\}$ 存在强收敛的子列.

引理 5 若 $bS_{H,L}^2 - 1 \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\omega < 0$, 则对每个 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $A_k \in \mathcal{E}_k$ 使得 $\sup_{u \in A_k} I(u) < 0$.

3.2 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$ 的情况

由于 $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega < 0$ 且 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$, 有

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1 - bS_{H,L}^2}{4S_{H,L}^2} \|u\|^4 + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|.$$

令

$$M(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1 - bS_{H,L}^2}{4S_{H,L}^2} t^4 + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|, \quad t \geq 0.$$

直接计算表明: 当 $0 < t < \tilde{t}$ 时, $M'(t) > 0$; 当 $t > \tilde{t}$ 时, $M'(t) < 0$, 且 $M(t)$ 在 $\tilde{t}$ 处取最大值. 这

里, $\tilde{t} := \sqrt{\frac{S_{H,L}^2}{1 - bS_{H,L}^2}}$. 令

$$\tilde{M} := M(\tilde{t}) = \frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|,$$

因为 $(b, \lambda, \omega) \in C_0$, 所以, 由

$$\frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{1 - \frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| > 0,$$

得出

$$\frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| > 0,$$

则 $M_0 = \frac{1}{2} \tilde{M} = \frac{S_{H,L}^2}{8(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| > 0$. 结

合 $\omega < 0$, 存在 $t_0 \in (0, \tilde{t})$ 使得 $M(t_0) = M_0$.

定义截断函数 $\xi(x) \in C^1[0, \infty)$, 使得

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq t_0^2, \\ 0 \leq \xi(x) \leq 1, & t_0^2 \leq x \leq \tilde{t}^2, \\ \frac{2S_{H,L}^2}{x} + \frac{2\omega S_{H,L}^2 e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| - 4S_{H,L}^2 \tilde{M}}{x^2} + \\ bS_{H,L}^2, & x \in [\tilde{t}^2, +\infty). \end{cases}$$

考虑在 $H_0^1(\Omega)$ 中定义的辅助泛函为

$$I_\xi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{\lambda}{2} \|u\|_2^2 + \frac{\omega}{2} \|u\|_2^2 -$$

$$\frac{\omega}{2} \int_{\Omega} u^2 \log u^2 \, dx -$$

$$\frac{1}{4} \xi(\|u\|^2) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|^4} \, dx dy.$$

$\forall u, \phi \in H_0^1(\Omega)$, 其Fréchet导数为

$$\begin{aligned} \langle I_\xi'(u), \phi \rangle = & (1 + b\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_\Omega u \phi dx - \\ & \omega \int_\Omega u \phi \log u^2 dx - \\ & \frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u_n(x)|^2 |u_n(y)|^2}{|x-y|^4} dx dy \xi'(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \\ & \xi(\|u\|^2) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2 |\phi(y)|^2}{|x-y|^4} dx dy. \end{aligned}$$

接下来证明截断的能量泛函 $I_\xi(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中下方有界。

引理 6 若 $b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0$, 且 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$. 则 $I_\xi(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中下方有界。

证明 对于任意 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 由于 $b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0$, 且 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$, 根据式(5)和截断函数 $\xi(x)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} I_\xi(u) \geq & \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \\ & \frac{1}{4S_{H,L}^2} \xi(\|u\|^2) \|u\|^4 + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|. \end{aligned} \quad (12)$$

定义 $M_\xi(t) = \frac{1}{2} t^2 + \frac{b}{4} t^4 - \frac{1}{4S_{H,L}^2} \xi(t^2) t^4 + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|, t \geq 0$.

从 $\xi(x)$ 的定义可以推出

$$M_\xi(t) = M(t), 0 \leq t \leq t_0;$$

$$M_\xi(t) \geq M(t), t_0 \leq t \leq \tilde{t};$$

$$M_\xi(t) = \tilde{M}, t \geq \tilde{t}.$$

因此, 对于所有的 $u \in H_0^1(\Omega)$, 有

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, \\ u_n \rightarrow u, \\ \left(\int_\Omega \frac{|u_n(y)|^2}{|x-y|^4} dy \right) u_n \rightarrow \left(\int_\Omega \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^4} dy \right) u, \\ u_n \rightarrow u, \end{cases} \quad \begin{aligned} & \text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中,} \\ & \text{在 } L^p(\Omega) \text{ 中, } 1 \leq p < 4, \\ & \text{在 } L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \text{ 中,} \end{aligned} \quad (14)$$

此外, 根据文献[20]的引理 2.5 和文献[10]的引理 2.3, 存在至多可数的指标集 J 和点 $(x_k)_{k \in J}$ 的集合, 使得在测度意义上, 有

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup \omega \geq |\nabla u|^2 + \sum_{k \in J} \omega_k \delta_{x_k}, \quad \omega_k > 0,$$

$$\left(\int_\Omega \frac{|u_n(y)|^2}{|x-y|^4} dy \right) u_n^2 \rightharpoonup v = \left(\int_\Omega \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^4} dy \right) u^2 +$$

$$I_\xi(u) \geq M_\xi(\|u\|) \geq \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|.$$

证毕。

接下来证明 I_ξ 满足 $(PS)_c$ 条件。

引理 7 令 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$, 且 $(b, \lambda, \omega) \in C_0$. 若

$$c < c^* := \min \left\{ \frac{S_{H,L}^2}{8(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|, \frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{1 - \frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| \right\},$$

则 I_ξ 满足 $(PS)_c$ 条件。

证明 由于 $(b, \lambda, \omega) \in C_0, c^* > 0$. 设 $\{u_n\} \in H_0^1(\Omega)$ 是 I_ξ 的 $(PS)_c$ 序列。由于 $c < M_0$, 当 n 充分大时, 有 $I_\xi(u_n) < M_0$. 结合式(12)和 $\xi(x)$ 的定义可知, 当 n 充分大时, $\xi(\|u_n\|^2) = 1$, $\xi'(\|u_n\|^2) = 0$. 由于 $b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0$, 有

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{4} \|u_n\|_2^2 + \frac{\omega}{2} \|u_n\|_2^2 - \frac{\omega}{4} \int_\Omega u_n^2 \log u_n^2 dx \geq \\ \frac{\omega}{4} e^{1 - \frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|. \end{aligned} \quad (13)$$

当 n 充分大且式(13)成立时, 利用 $\xi'(\|u_n\|^2) = 0$, 有

$$\begin{aligned} M_0 + o_n(1) \|u_n\| & \geq I_\xi(u_n) - \frac{1}{4} \langle I_\xi'(u_n), u_n \rangle \geq \\ & \frac{1}{4} \|u_n\|^2 + \frac{\omega}{4} e^{1 - \frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|. \end{aligned}$$

因此, $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界。则存在 $\{u_n\}$ 的子序列 (仍记为 $\{u_n\}$) 和 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} & \text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中,} \\ & \text{在 } L^p(\Omega) \text{ 中, } 1 \leq p < 4, \end{aligned}$$

$$\text{在 } L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \text{ 中,} \quad (14)$$

在 Ω 上几乎处处成立。

$$\sum_{k \in J} v_k \delta_{x_k}, \quad \sum_{k \in J} v_k^{1/2} < \infty, \quad (15)$$

另外, 也有

$$\omega_k \geq S_{H,L} v_k^{1/2}. \quad (k \in J) \quad (16)$$

现在证明 $J = \emptyset$. 反证法: 设 $J \neq \emptyset$ 且固定 $k \in J$. 定义函数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足在 $B(x_k, \rho)$ 上, $\phi(x) = 1$; 在 $\Omega \setminus B(x_k, 2\rho)$ 上, $\phi(x) = 0$; 在其他

部分上, $0 \leq \phi(x) \leq 1$; 且在 Ω 中满足 $|\nabla \phi| \leq \frac{2}{\rho}$ (其中 $\rho > 0$ 为合适常数)。由于在 $H^{-1}(\Omega)$ 中, $I'_\xi(u_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且 $\{u_n \phi\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上有界, 当 n 充分大时, 有 $\xi(\|u_n\|^2) = 1, \xi'(\|u_n\|^2) = 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle I'_\xi(u_n), u_n \phi \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1 + b\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n \phi) dx - \right. \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} u_n^2 \phi dx - \omega \int_{\Omega} u_n^2 \phi \log u_n^2 dx - \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^2 |u_n(y)|^2 \phi(y)}{|x-y|^4} dx dy \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1 + b\|u_n\|^2) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \phi dx - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^2 |u_n(y)|^2 \phi(y)}{|x-y|^4} dx dy \right\} + o(1). \quad (17) \end{aligned}$$

从式(17)得

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1 + b \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \phi dx) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \phi dx - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^2 |u_n(y)|^2 \phi(y)}{|x-y|^4} dx dy \right\} + o(1). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$, 有

$$0 \geq (1 + b\omega_k) \omega_k - v_k.$$

将其与式(16)结合, 且 $bS_{H,L}^2 - 1 < 0$, 有

$$\omega_k \geq \frac{S_{H,L}^2}{1 - bS_{H,L}^2}. \quad (18)$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $I_\xi(u_n) \rightarrow c$ 和在 $H^{-1}(\Omega)$ 中, $I'_\xi(u_n) \rightarrow 0$, 利用 $\{u_n\}$ 的有界性, 式(13)以及当 n 充分大时, $\xi(\|u_n\|^2) = 1$ 和 $\xi'(\|u_n\|^2) = 0$, 有

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ I_\xi(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'_\xi(u_n), u_n \rangle \right\} \geq \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \phi dx + \frac{\omega}{4} e^{1-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

$$I_\xi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 - \frac{\lambda}{2} \|u\|^2 \|v\|_2^2 + \frac{\omega}{2} \|u\|^2 \|v\|_2^2 - \frac{\omega}{2} \|u\|^2 \int_{\Omega} v^2 \log v^2 dx - \frac{\omega}{2} \|u\|^2 \log \|u\|^2 \|v\|_2^2 -$$

$$\frac{1}{4} \xi(\|u\|^2) \|u\|^4 \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x)|^2 |v(y)|^2}{|x-y|^4} dx dy \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 + \frac{|\lambda|}{2\lambda_1} \|u\|^2 -$$

$$\frac{\omega}{2} C \|u\|^2 \|v\|_{2+\delta}^{2+\delta} - \frac{\omega}{2} \|u\|^2 \log \|u\|^2 \|v\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} \|u\|^4 + \frac{|\lambda|}{2\lambda_1} \|u\|^2 -$$

$$\frac{\omega}{2} C \|u\|^2 \|v\|^{2+\delta} - \frac{\omega}{2} C \|u\|^2 \log \|u\|^2 \|v\|^2 = \frac{\|u\|^2}{2} \left(1 + \frac{b}{2} \|u\|^2 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1} - \omega C - \omega C \log \|u\|^2 \right).$$

在式(19)中令 $\rho \rightarrow 0$, 再由式(18)可得

$$c \geq \frac{1}{4} \omega_k + \frac{\omega}{4} e^{1-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| \geq \frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{1-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|,$$

与 $c < \frac{S_{H,L}^2}{4(1 - bS_{H,L}^2)} + \frac{\omega}{4} e^{1-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega|$ 矛盾。因

此, $\mathcal{J} = \emptyset$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\int_{\Omega} (|x|^{-4} * |u_n|^2) |u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} (|x|^{-4} * |u|^2) |u|^2 dx. \quad (20)$$

利用 $H^{-1}(\Omega)$ 中的 $I'_\xi(u_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, $\{u_n\}$ 的有界性以及当 n 充分大时 $\xi(\|u_n\|^2) = 1$ 和 $\xi'(\|u_n\|^2) = 0$, 结合引理2, 式(14)和式(20), 有

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle I'_\xi(u_n), u_n - u \rangle = \\ &= (1 + b\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx - \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} u_n (u_n - u) dx - \omega \int_{\Omega} u_n (u_n - u) \log u_n^2 dx - \\ &\quad \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^2 |u_n(y)|^2 (u_n - u)(y)}{|x-y|^4} dx dy = \\ &= (1 + b\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx + o_n(1), \end{aligned}$$

这意味着

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

结合 u_n 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的弱收敛性, 可得在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u (n \rightarrow \infty)$ 。

证毕。

引理 8 若 $b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0$ 。则对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在一个 $A_k \in \mathcal{E}_k$, 使得 $\sup_{u \in A_k} I_\xi(u) < 0$ 。

证明 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 设 H_k 是 $H_0^1(\Omega)$ 的 k 维子空间。根据 $\omega < 0$ 和 ξ 的定义, 利用式(9)和 Sobolev-Hardy-Littlewood 嵌入定理, $0 < \delta < 2_\mu^* - 1$, 对于任意 $u \in H_k \setminus \{0\}$ 且 $\|u\| < 1$,

式中: $v = u/\|u\|$, λ_1 为 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值。注意 $\omega < 0$, 则对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在适当小的 ρ_k 和常数 $M_k > 0$, 使得当 $u \in H_k$ 且 $\|u\| = \rho_k$ 时, $I_\xi(u) \leq -M_k < 0$ 。

证毕。

4 定理2的证明

引理 9 若 $(b, \lambda, \omega) \in D_0$ 。则存在 $\tilde{r} > 0$, 使得对所有 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\|u\| = \tilde{r}$, $I(u) > 0$ 。

证明 对于所有 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, 由于 $b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0$, 再利用式(5)和式(7), 有

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|u\|_2^2 - \frac{\omega}{2} \int_{\Omega} u^2 \log u^2 dx - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \geq \frac{b}{4}\|u\|^4 + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \frac{1}{S_{H,L}^{2_\mu^*}} \|u\|^{2 \cdot 2_\mu^*}。$$

令

$$h(t) = \frac{b}{4} t^4 + \frac{\omega}{2} e^{-\frac{\lambda}{\omega}} |\Omega| - \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} \frac{1}{S_{H,L}^{2_\mu^*}} t^{2 \cdot 2_\mu^*}, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

且 $\tilde{r} = (b S_{H,L}^{2_\mu^*})^{\frac{1}{2 \cdot 2_\mu^* - 4}}$, 由于 $(b, \lambda, \omega) \in D_0$, 有 $h(\tilde{r}) > 0$ 。因此, 对于所有 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\|u\| = \tilde{r}$, 有 $I(u) \geq h(\tilde{r}) > 0$ 。

证毕。

定义 $c_{r_0} = \inf_{\|u\| \leq r_0} I(u)$, 其中 r_0 的选择使得 $r_0 < \tilde{r}$ 且 $h(r_0) > 0$ 。下面证明 $-\infty < c_{r_0} < 0$ 。

引理 10 若 $b > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \omega < 0$, 则 $-\infty < c_{r_0} < 0$ 。

证明 由 $I(u) \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ 和 c_{r_0} 的定义易见, $c_{r_0} > -\infty$ 。接下来证明 $c_{r_0} < 0$, 对于任意的 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ 且 $t > 0$, 有

$$I(tu) = t^2 \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{b}{4} t^2 \|u\|^4 - \frac{\lambda}{2} \|u\|_2^2 - \frac{\omega}{2} \log t^2 \|u\|_2^2 + \frac{\omega}{2} \int_{\Omega} u^2 (1 - \log u^2) dx - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2 \cdot 2_\mu^*} t^{2 \cdot 2_\mu^* - 2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2_\mu^*} |u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dx dy \right)。$$

由于 $\omega < 0$, 存在 $t_u > 0$ 适当小, 使得 $\|t_u u\| \leq r_0$ 且 $I(t_u u) < 0$, 这意味着 $c_{r_0} < 0$ 。

证毕。

在引理9和引理10的基础上, 将证明 c_{r_0} 的极小化序列的紧性, 这在定理2的证明中起着关键作用。

引理 11 若 $(b, \lambda, \omega) \in D_0$ 。则存在 c_{r_0} 的极小化序列 $\{u_n\}$ 和 $u \in H_0^1(\Omega)$, 至多选取子列, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u$ 。

证明 设 $\{v_n\} \subset B_{r_0} \in \mathcal{E}$ 是 c_{r_0} 的一个极小化序列, 使得 $c_{r_0} \leq I(v_n) \leq c_{r_0} + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ 。由于 $c_{r_0} < 0$ 且对于所有 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $\|u\| = r_0, I(u) > 0$ 。从 $I(u)$ 的连续性可以得出, 存在适当小的常数 $\sigma > 0$, 使得对于充分大的 $n, \|v_n\| \leq r_0 - \sigma$ 。类似于文献[21]引理3.3的证明, 可以证明对于 c_{r_0} , 存在另一个极小化序列 $\{u_n\} \subset B_{r_0} \in \mathcal{E}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} I'(u_n) = 0$ 。

由于 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界, 假设存在 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u, & \text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中,} \\ u_n \rightarrow u, & \text{在 } L^p(\Omega) \text{ 中, } 1 \leq p < 2^*, \\ u_n \rightarrow u, & \text{在 } \Omega \text{ 中几乎处处成立。} \end{cases} \quad (22)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{cases} |u_n|^{2_\mu^*} \rightarrow |u|^{2_\mu^*}, & \text{在 } L^{2N/(2N-\mu)}(\Omega) \text{ 中,} \\ |u_n|^{2_\mu^*-2} u_n \rightarrow |u|^{2_\mu^*-2} u, & \text{在 } L^{2N/(N+2-\mu)}(\Omega) \text{ 中。} \end{cases}$$

由于 Riesz 位势是一个从 $L^{2N/(2N-\mu)}(\Omega)$ 到 $L^{2N/\mu}(\Omega)$ 的线性连续映射, 故有

$$\int_{\Omega} \frac{|u_n(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dy \rightarrow \int_{\Omega} \frac{|u(y)|^{2_\mu^*}}{|x-y|^\mu} dy,$$

在 $L^{2N/\mu}(\Omega)$ 中, $n \rightarrow \infty$ 。

要证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中, $u_n \rightarrow u$, 令 $w_n = u_n - u$ 。显然, $\{w_n\}$ 也是 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界序列, 所以, 存在 $\{w_n\}$ 的子序列(仍用 $\{w_n\}$ 表示), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = l \geq 0. \quad (23)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 利用在 $H_0^1(\Omega)$ 中, $u_n \rightarrow u$, 有

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u\|^2 + o_n(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $I'(u_n) \rightarrow 0$, 可以从式(11)、式(22)和式(24)推出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
o_n(1) = & \langle I'(u_n), u \rangle = \left(1 + b\|u_n\|^2\right) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u dx - \\
& \lambda \int_{\Omega} u_n u dx - \omega \int_{\Omega} u_n u \log u_n^2 dx - \\
& \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^{2_p^*} |u_n(y)|^{2_p^*-1} u(y)}{|x-y|^{\mu}} dx dy = \\
& \|u\|^2 + b\|u\|^4 + b\|w_n\|^2 \|u\|^2 - \lambda \|u\|_2^2 - \\
& \omega \int_{\Omega} u^2 \log u^2 dx - \\
& \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{2_p^*} |u(y)|^{2_p^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy + o_n(1). \quad (25)
\end{aligned}$$

结合 $I'(u_n) \rightarrow 0$ 和 $\{u_n\}$ 的有界性, 并结合式(10)、式(22)、式(24)、式(25)和 Brézis-Lieb 引理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
o_n(1) = & \langle I'(u_n), u_n \rangle = \left(1 + b\|u_n\|^2\right) \|u_n\|^2 - \\
& \lambda \|u_n\|_2^2 - \omega \int_{\Omega} u_n^2 \log u_n^2 dx - \\
& \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^{2_p^*} |u_n(y)|^{2_p^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy = \\
& \|w_n\|^2 + b\|w_n\|^4 + b\|w_n\|^2 \|u\|^2 - \\
& \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|w_n(x)|^{2_p^*} |w_n(y)|^{2_p^*}}{|x-y|^{\mu}} dx dy + o_n(1). \quad (26)
\end{aligned}$$

假设 $l > 0$. 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $I(u_n) \rightarrow c_{r_0}$, 由式(10)、式(22)、式(24)、式(26)和 Brézis-Lieb 引理可以得出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
c_{r_0} + o_n(1) = & I(u_n) = I(u) + \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*} \langle I'(u_n), u_n \rangle + \\
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) \|w_n\|^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*} - \frac{1}{4}\right) b \|w_n\|^4 + \\
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) b \|w_n\|^2 \|u\|^2 + o_n(1) = \\
& I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) \|w_n\|^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*} - \frac{1}{4}\right) b \|w_n\|^4 + \\
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) b \|w_n\|^2 \|u\|^2 + o_n(1). \quad (27)
\end{aligned}$$

在式(27)中, 令 $n \rightarrow \infty$, 应用式(23), 得

$$\begin{aligned}
c_{r_0} = & I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) l - \left(\frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*} - \frac{1}{4}\right) b l^2 + \\
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) b l \|u\|^2. \quad (28)
\end{aligned}$$

通过范数的弱下半连续性, 有 $\|u\| \leq r_0$, 这与式(23)和式(24)一起保证了

$$0 < l \leq r_0^2 < \tilde{r}^2 = (b S_{H,L}^{2_p^*})^{\frac{1}{2_p^*-2}}. \quad (29)$$

由于 $1 < 2_{\mu}^* < 2$, 通过直接计算, 可以从式(29)推出

$$\begin{aligned}
c_{r_0} = & I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) l - \left(\frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*} - \frac{1}{4}\right) b l^2 + \\
& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2_{\mu}^*}\right) b l \|u\|^2 > I(u), \quad (30)
\end{aligned}$$

与 $c_{r_0} \leq I(u)$ 矛盾. 因此, $l = 0$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u$.

证毕.

由引理 11 和 $I(u)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的 C^1 泛函, 得到 u 是问题(1)的局部极小解, 满足 $I(u) < 0$. 直接计算式(21)可得, 在 $[0, +\infty)$ 上 $h'(t) \geq 0$. 结合 $h(r_0) > 0$, 可以推出当 $\|u\| \geq r_0$ 时, 有 $I(u) \geq h(\|u\|) > 0$. 因此, 具有负能量的局部极小解 u 必定是基态解. 这就完成了定理 2 的证明.

5 结 论

本文运用变分方法和非线性分析技术, 研究了一类同时含有 Kirchhoff-Choquard 非局部项、临界增长非线性项及对数扰动项的椭圆方程. 研究的核心挑战在于临界增长项与对数扰动项耦合导致的紧性缺失问题, 以及对数项符号的不确定性、不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 条件带来的分析困难. 为此, 结合集中紧性原理和对数不等式等工具进行处理.

研究策略与主要结果根据 SHL 临界指数的不同分为两类情形:

1) 对于较大的 SHL 临界指数, 当参数较大时, 能量泛函在 $H_0^1(\Omega)$ 中是强化的且满足全局 PS 条件, 因此直接应用对称山路引理, 证明了方程存在无穷多个解. 当参数较小时, 能量泛函性质发生显著变化. 为克服此困难, 引入截断函数以及辅助泛函处理临界项, 应用集中紧性原理获得局部 PS 条件, 继而再次利用对称山路引理, 同样证明了无穷多个解的存在性.

2) 对于较小的 SHL 临界指数, 由于临界指数较低, 加之对数项带来的符号不确定性和不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 条件, 导致 PS 序列紧性证明困难. 基于此, 本文转而深入分析能量泛函的结构,

证明了方程至少存在一个局部极小解。进一步,在附加参数条件下,证明了该解也是基态解。

本文的贡献在于将传统的 Kirchhoff 方程推广至 Kirchhoff-Choquard 方程,并为处理此类兼具非局部项、临界项及对数扰动的复杂问题提供了新的分析框架。值得指出的是,研究结果的普适性受到证明过程中所必需的强假设条件的限制,这是本文的不足之处。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献:

- [1] WEI S. Two sequences of solutions for the semilinear elliptic equations with logarithmic nonlinearities [J]. *Journal of Differential Equations*, 2023, 343: 263-284.
- [2] SQUASSINA M, SZULKIN A. Multiple solutions to logarithmic Schrödinger equations with periodic potential [J]. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2015, 54(1): 585-597.
- [3] CHEN J, CHENG B, HUANG X. Ground state solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations with Choquard type nonlinearity [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 102: 106141.
- [4] FENG X, LI Y. Normalized solutions of the choquard equation with Sobolev critical exponent [J]. *Frontiers of Mathematics*, 2025, 20(3): 581-601.
- [5] HE Q, HE Y, LV J. The existence of positive solutions to the Choquard equation with critical exponent and logarithmic term [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2023, 519(1): 126737.
- [6] MA S. Non-existence and multiplicity of positive solutions for Choquard equations with critical combined nonlinearities [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2025, 288(7): 110826.
- [7] DUAN X, WU X, WEI G, et al. The critical Choquard equations with a Kirchhoff type perturbation in bounded domains [J]. *Applicable Analysis*, 2024, 103(11): 1944-1962.
- [8] FEI J, ZHANG Q. Normalized ground states for a kind of Choquard-Kirchhoff equations with critical nonlinearities [J]. *Boundary Value Problems*, 2024, 2024(1): 142.
- [9] 徐武波, 蔡亚情. 一类含有对数项的 Kirchhoff-Choquard 方程解的存在性 [J]. *理论数学*, 2024, 14(8): 60-67.
- XU W B, CAI Y Q. Existence of solutions to the Kirchhoff-Choquard equation with logarithmic term [J]. *Pure Mathematics*. 2024, 14(8): 60-67. (in Chinese)
- [10] LIANG S H, PUCCL P, ZHANG B L. Multiple solutions for critical Choquard-Kirchhoff type equations [J]. *Advances in Nonlinear Analysis*, 2020, 10(1): 400-419.
- [11] WANG L. Solutions to discrete nonlinear Kirchhoff-Choquard equations [J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2024, 47(5): 138.
- [12] GAO Q, HE X. Normalized solutions for the Choquard equations with critical nonlinearities [J]. *Advances in Nonlinear Analysis*, 2024, 13(1): 20240030.
- [13] ZHANG Y, QIN D. Existence of solutions for a critical Choquard-Kirchhoff problem with variable exponents [J]. *The Journal of Geometric Analysis*, 2023, 33(7): 200.
- [14] LIU M, SUN R. Normalized solutions for Kirchhoff-Choquard type equations with different potentials [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2024, 65(4): 041511.
- [15] LI Q, WANG R, MAO A. Existence of normalized solutions to Kirchhoff-Choquard equation with critical Sobolev perturbation [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2024, 65(12): 121506.
- [16] RABINOWITZ P H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations* [M]. New York: American in Mathematical Society, 1986.
- [17] HAN Y. A critical Kirchhoff equation with a logarithmic type perturbation in dimension 4 [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025, 48(1): 549-562.
- [18] LI Q, HAN Y, WANG T. Existence and nonexistence of solutions to a critical biharmonic equation with logarithmic perturbation [J]. *Journal of Differential Equations*, 2023, 365: 1-37.
- [19] ZHANG Q, HAN Y. Existence and multiplicity of solutions for a critical Kirchhoff type elliptic equation with a logarithmic perturbation [DB/OL]. (2025-05-14) [2025-04-22]. <https://arxiv.org/abs/2501.05083>.
- [20] GAO F, DA SILVA E D, YANG M, et al. Existence of solutions for critical Choquard equations via the concentration-compactness method [J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A: Mathematics*, 2020, 150(2): 921-954.
- [21] LI Q, HAN Y. Existence of solutions to a critical Kirchhoff equation with logarithmic perturbation [J]. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2025, 70(2): 247-262.