中北大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF NORTH UNIVERSITY OF CHINA(NATURAL SCIENCE EDITION)
2026年 第47卷 第5期(总第229期)
Vol. 47 No. 5 2026(Sum No. 229)

文章编号：1673-3193(2026)05-0716-13 J. North Univ. China, Nat. Sci. Ed., 2026, 47(5): 716-728.

航空面齿轮展成磨削表面形貌的预测与分析

马晓帆[1,2,3,4]，周天毅[1]，李京阳[1,2,3,4*]

(1. 中北大学 航空宇航学院，山西 太原 030051；2. 中北大学 太行宇航研究院，山西 太原 030051；
3. 山西省无人飞行器工程研究中心，山西 太原 030051；
4. 中北大学 极限环境光电动态测试技术与仪器全国重点实验室，山西 太原 030051)

摘　要：航空面齿轮展成磨削过程中，在砂轮转速、进给速度、砂轮分度角以及切削深度同时作用下，磨削接触区域不断变化，导致齿顶/齿根、内/外径区域的纹理和包络残差存在明显差异。为了实现齿面形貌的预测和优化，本文以21齿圆柱齿轮与28齿面齿轮、模数3 mm、齿宽4 mm、轴交角90°为研究对象，建立从圆柱齿轮运动坐标系到面齿轮运动坐标系的齐次变换和啮合方程，以渐开线CBN砂轮替代虚拟圆柱齿轮形成展成磨削运动。方法上，将砂轮150 mm外径、300目(约50 μm)磨粒及其随机位置和突出高度引入砂轮工作表面模型，把齿面展开区域(X为43～47 mm、Z为0～6.75 mm)离散为高度场，通过磨粒与齿轮材料的布尔运算实现齿面形貌的仿真预测；进一步以磨削宽度、接触弧长、有效磨粒数量和未变形切屑厚度为特征参数，用滑擦-犁耕-切削分区判定磨粒是否有效切削，从而把砂轮转速、砂轮分度角、进给速度和磨削深度传递到Sa和包络残差分布。利用Makino V33-5XB五轴加工机床开展磨削实验，并用VH-Z500R超景深显微镜测量线切割、超声清洗后的轮齿表面。结果表明：预测Sa与实验值变化趋势一致，相对误差低于9.76%；齿面粗糙度随砂轮转速的升高而降低，随分度角、进给速度和磨削深度的增大而升高，其中分度角对形貌均匀性的影响最显著。当分度角由1.25°减小至0.50°时，最大包络残差由约2.40 μm降至约0.30 μm，高残差区从齿面上部和局部边界明显收缩，说明增强路径重叠可削弱局部峰谷残留。本文的创新点在于将面齿轮展成运动、随机磨粒表面、有效切削判据和布尔运算统一到齿面形貌预测之中，不仅获得了齿面整体形貌，还能呈现齿高和径向位置上的形貌差异，为齿面形貌的优化提供了依据。

关键词：面齿轮；展成磨削；齿面形貌；预测模型

中图分类号：TG61　　**文献标识码：**A　　**doi:** 10.62756/jnuc.issn.1673-3193.2026.05.0026

引用格式：马晓帆，周天毅，李京阳. 航空面齿轮展成磨削表面形貌的预测与分析[J]. 中北大学学报(自然科学版)，2026，47(5)：716-728.

Ma Xiaofan, Zhou Tianyi, Li Jingyang. Prediction and analysis for surface topography in aviation face gear generating grinding[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2026, 47(5): 716-728.

Prediction and Analysis for Surface Topography in Aviation Face Gear Generating Grinding

Ma Xiaofan[1,2,3,4], Zhou Tianyi[1], Li Jingyang[1,2,3,4*]

(1. School of Aerospace Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China;
2. Taihang Aerospace Research Institute, North University of China, Taiyuan 030051, China;

收稿日期：2026-05-31

基金项目：国家自然科学基金(52505074，12672461)；中国博士后科学基金(2025M781272)；山西省自然科学基金(202403021212141)；山西省高等学校科技创新项目(2024L163)

作者简介：马晓帆(1992－)，男，讲师，博士，主要从事航空航天工程方面的研究。E-mail：maxiaofan@nuc.edu.cn。

* **通信作者：**李京阳(1987－)，男，教授，博士，主要从事航空航天工程方面的研究。E-mail：20220126@nuc.edu.cn。

3. Shanxi Engineering Research Center of Unmanned Aerial Vehicle, Taiyuan 030051, China;
4. State Key Laboratory of Extreme Environment Optoelectronic Dynamic Measurement Technology and Instrument, North University of China, Taiyuan 030051, China）

Abstract: During the generating grinding of aviation face gears, the combined effects of wheel speed, feed rate, wheel indexing angle, and grinding depth continuously alter the grinding contact zone, resulting in significant differences in surface texture and envelope residuals between the tooth tip and root as well as the inner and outer radial regions. To achieve accurate prediction and optimization of tooth surface topography, this study investigates a face gear pair consisting of a 21-tooth cylindrical gear and a 28-tooth face gear with a module of 3 mm, a tooth width of 4 mm, and a shaft angle of 90°. A homogeneous coordinate transformation and meshing equations were established to describe the kinematic relationship between the cylindrical gear and the face gear coordinate systems, while an involute CBN grinding wheel was employed to replace the virtual cylindrical gear for generating grinding. A grinding wheel surface model was developed by incorporating a wheel diameter of 150 mm together with 300-mesh（about 50 μm）abrasive grains characterized by randomly distributed positions and protrusion heights. The unfolded gear surface（X is from 43 to 47 mm, Z is from 0 to 6.75 mm）was discretized into a height field, and the simulation and prediction of gear surface topography was realized through Boolean operations of abrasive grains and gear materials. Furthermore, the grinding width, contact arc length, effective number of abrasive grains, and undeformed chip thickness were adopted as characteristic parameters to determine the effective cutting state of each abrasive grain according to the rubbing-ploughing-cutting transition criterion, thereby establishing the influence of wheel speed, wheel indexing angle, feed rate, and grinding depth on the distributions of surface roughness（Sa）and envelope residuals. Grinding experiments were conducted on a Makino V33-5XB five-axis machine tool, and the ground tooth surfaces were measured using a VH-Z500R ultra-depth-of-field microscope after wire electrical discharge machining and ultrasonic cleaning. The results demonstrate that the predicted Sa agrees well with the experimental measurements, with a maximum relative error below 9.76%. The gear surface roughness decreases with increasing wheel speed but increases with larger wheel indexing angles, feed rates, and grinding depths, among which the wheel indexing angle exhibits the most significant influence on topography uniformity. When the wheel indexing angle is reduced from 1.25° to 0.50°, the maximum envelope residual decreases from approximately 2.40 μm to 0.30 μm, and the high-residual regions near the upper tooth surface and local boundaries shrink considerably, indicating that enhanced grinding path overlap effectively suppresses local peak-to-valley residuals. The novelty of this study lies in integrating the face gear generating kinematics, stochastic abrasive wheel surface, effective cutting criterion, and Boolean material removal algorithm into a unified surface topography prediction framework. The proposed model predicts not only the overall tooth surface topography but also the variations in surface morphology along both the tooth height and radial directions, thereby providing a theoretical basis for the optimization of face gear grinding surface quality.

Key words: face gear; generating grinding; gear surface topography; prediction model

0 引 言

面齿轮传动副具有互换性高、振动和噪声低、对安装误差不敏感等优点，在相交轴动力传递领域具有广阔的应用价值，被称为“21世纪旋翼机传动的希望所在”[1-2]。Litvin团队围绕面齿轮几何设计、展成原理、齿面接触分析及直升机传动应用开展了奠基性研究，建立了面齿轮副的共轭创成、啮合接触和应力分析基础[3-5]。在此基础上，国内外学者进一步将研究拓展至面齿轮数控磨削和齿面误差控制。针对面齿轮磨削工艺，中南大学唐进元等[6-9]以碟形砂轮为磨削工具，研究

了面齿轮的磨削原理，建立了基于锥齿轮磨床运动机构的面齿轮磨削运动模型。通过求解砂轮-齿轮接触区域，推导了砂轮分度角的计算方法。西北工业大学郭辉等[10-11]提出了利用数控机床磨削面齿轮的方法，推导了基于五轴加工中心的x，y和z轴的插补公式，给出了面齿轮展成磨削齿面残差的计算方法。北京航空航天大学王延忠等[12-15]提出了采用CBN砂轮磨削面齿轮的加工方法，该方法通过分析砂轮与工件之间的展成运动对齿面创成的影响机理，实现了面齿轮的高精度和高效率加工。Wang等[16]建立了碟形砂轮磨削面齿轮表面粗糙度的计算模型，分析了磨削运动和工艺参数对粗糙度的影响；进一步地，Tao等[17]针对连续展成磨削过程中的蜗杆砂轮磨损问题，建立了砂轮磨损评价模型，揭示了砂轮磨损对齿轮表面形貌演变及粗糙度变化的影响规律，为考虑砂轮磨损因素的齿面形貌预测提供了理论依据。齿轮表面完整性是影响齿轮使用性能和疲劳寿命的重要因素，随着人们对齿轮应用要求的不断提高，齿轮表面完整性已成为当前制造领域的一个热点问题[18-19]。在表面完整性特征中，表面形貌对齿轮表面的微接触、摩擦磨损和润滑特性具有重要影响[20-21]。因此，研究面齿轮的齿面生成机理，建立齿面形貌预测模型，对于提高齿轮传动性能及制造效率，延长服役寿命具有重要意义[22]。

针对磨削表面形貌预测，现有研究大致形成了解析模型、基于磨粒轨迹的数值仿真、离散布尔运算/高度场更新、有限元或离散元接触仿真以及经验法等思路[23-27]。其中，布尔运算和高度场更新方法能够把单颗磨粒扫掠轨迹与工件表面离散网格联系起来，适合描述随机磨粒突出高度、轨迹重叠和局部材料去除对最终形貌的影响。砂轮表面随机建模方面，Nguyen等[27]采用磨粒空间位置与突出高度的随机分布生成砂轮表面；Darafon等[28]基于三维材料去除仿真计算未变形切屑厚度、接触长度和表面粗糙度；Zhou等[29]将磨粒运动轨迹与齿轮廓形磨削表面生成联系起来，说明复杂齿面磨削形貌需要同时考虑砂轮形貌、展成运动和局部接触条件。砂轮与工件的接触弧长、砂轮的有效磨粒数量，以及未变形切屑厚度，是建立齿面形貌预测模型的必要条件[23-27]。针对磨削过程材料去除参数的计算，Zhou等[30]将接触长度分为最大接触弧长和动态接触弧长，并指出动态接触弧长受刀-工接触曲率、磨粒刃高及其分布，以及砂轮和工件材料的弹性模量的影响。考虑砂轮形貌以及砂轮与工件材料的弹性模量，Osa等[31]建立了单颗磨粒的赫兹接触模型，仿真获得了磨粒与工件的接触弧长，证明了磨削深度、砂轮形貌及法向磨削力是影响磨削接触弧长的显著因素。Mao等[32]研究了磨削条件(磨削深度、进给速度、砂轮转速及砂轮直径)对接触弧长的作用机制，证明了接触弧长与磨削深度、进给速度以及砂轮直径呈正相关，并指出砂轮转速对接触弧长的影响较小；除此之外，发现磨削接触弧长与磨削力和磨削温度具有显著的交互作用。针对平面磨削中有效磨粒数量的研究，华侨大学尤芳怡等[33]通过分析磨削温度信号中的高频脉冲数量，确定了平面磨削中金刚石砂轮的有效磨粒数量，证明了有效磨粒数量与砂轮转速呈负相关。任敬心等[34]将有效磨粒数量分为动态有效磨粒数量和静态有效磨粒数量，并指出动态有效磨粒数量比静态有效磨粒数量少。Komanduri等[35]详细介绍了关于磨削工艺的重大进展，重点介绍了切屑厚度的解析建模。Agarwal等[36]将砂轮与工件的接触弧长应用于已有的切屑厚度解析模型中，提高了切屑厚度解析模型的计算精度。Wu等[37]建立了脆性材料的切屑厚度解析模型，利用微元法验证了切屑厚度解析模型的有效性。为了预测机器人砂带磨削的表面粗糙度，Qu等[38]建立了基于砂带-工件赫兹接触变形的切削厚度改进模型，结果表明，最大切屑厚度与工件的弹性模量呈正相关，与接触轮的弹性模量呈负相关。任敬心等[34]将未变形切屑厚度分为最大未变形切屑厚度和平均切屑厚度，并建立了相应的解析模型。分析发现，最大未变形切屑厚度与工件进给速度和砂轮转速呈正相关，同时证明了磨粒间距也是影响最大未变形切屑厚度的重要因素，具体表现为磨粒间距越大，未变形切屑厚度越大。

综上可知，已有研究已经从面齿轮几何、磨削运动建模和表面粗糙度预测等方面取得了进展，但仍存在以下不足：1）已有工作多侧重整体粗糙度、单一典型测点或包络残差变化，对齿顶、齿根及内外径区域形貌差异的解释不足；2）砂轮随机形貌、磨粒有效切削、临界切削厚度和离散材料去除过程之间的耦合关系尚未形成可直接复现的计算链条；3）分度角变化对路径重叠、局部峰谷残留和区域均匀性的作用机理仍需进一步量化。因此，本文在面齿轮展成磨削啮合运动模型

基础上，提出结合砂轮随机形貌、磨粒轨迹和离散布尔差材料去除的齿面形貌预测方法，推导磨削宽度、接触弧长、有效磨粒数量和未变形切屑厚度等特征参数，并通过实验验证模型精度，进一步分析砂轮转速、砂轮分度角、进给速度和切削深度对齿面粗糙度区域分布的影响。

1　面齿轮齿面磨削原理

1.1　面齿轮传动啮合原理

面齿轮副由面齿轮和圆柱齿轮组成，两齿轮的轴线相交，其夹角为90°。根据齿轮啮合原理，建立面齿轮副的传动坐标系，如图1所示，其中，$S_p(x_p,y_p,z_p)$表示与圆柱齿轮固连的固定坐标系，$S_m(x_m,y_m,z_m)$表示与面齿轮固连的固定坐标系，$S_s(x_s,y_s,z_s)$表示圆柱齿轮的运动坐标系，$S_2(x_2,y_2,z_2)$表示面齿轮的运动坐标系。上述坐标系的坐标原点相重合，轴线z_m和z_2的夹角为90°，ϕ_s和ϕ_2分别表示圆柱齿轮和面齿轮的转角。

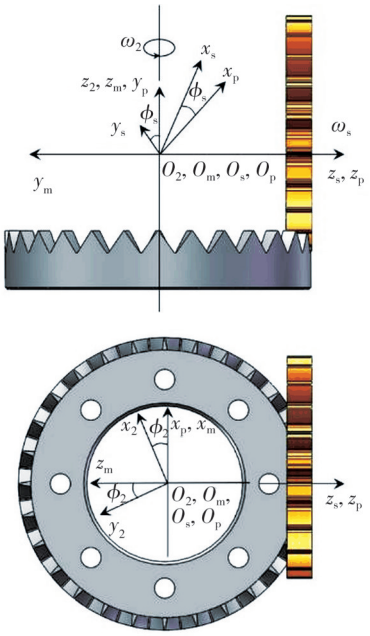


图1　面齿轮副传动坐标系

Fig. 1　Transmission coordinate system of face gear pair

$\boldsymbol{M}_{2s}$表示坐标系S_s到坐标系S_2的变换矩阵，其表达式为

$$\boldsymbol{M}_{2s}=\boldsymbol{M}_{2p}\boldsymbol{M}_{pm}\boldsymbol{M}_{ms}, \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{M}_{pm}$表示坐标系S_m到坐标系S_p的变换矩阵；$\boldsymbol{M}_{ms}$表示坐标系S_s到坐标系S_m的变换矩阵。由式(1)可得

$$\boldsymbol{M}_{2s}=\begin{bmatrix}\cos\phi_2\cos\phi_s & -\sin\phi_2\cos\phi_s & \sin\phi_s & 0\\ -\cos\phi_2\sin\phi_s & \sin\phi_2\sin\phi_s & \cos\phi_s & 0\\ -\sin\phi_2 & -\cos\phi_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{2}$$

式中：ϕ_2为面齿轮转角；ϕ_s为渐开线齿轮转角。

$$\phi_2=\phi_s\frac{n_s}{n_2}。 \tag{3}$$

渐开线齿轮的齿廓方程可以表示为

$$\boldsymbol{r}_s(u_s,\theta_s)=\begin{bmatrix}x_s\\ y_s\\ z_s\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pm r_{bs}[\sin(\theta_s+\theta_{os})-\theta_s\cos(\theta_s+\theta_{os})]\\ -r_{bs}[\cos(\theta_s+\theta_{os})+\theta_s\sin(\theta_s+\theta_{os})]\\ u_s\\ 1\end{bmatrix}。 \tag{4}$$

根据空间啮合理论，面齿轮的齿面径矢函数可以表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_2(\mu_s,\theta_s,\phi_s)=\boldsymbol{M}_{2s}(\phi_s)\boldsymbol{r}_s(\mu_s,\theta_s),\\ f(\mu_s,\theta_s,\phi_s)=0。\end{cases} \tag{5}$$

联立式(1)～式(5)，可得面齿轮的齿面方程

$$\boldsymbol{r}_2(\theta_s,\phi_s)=\begin{Bmatrix}\pm r_{bs}\left[\cos\phi_2(\sin\xi_s-\theta_s\cos\xi_s)-\dfrac{\sin\phi_2}{m_{2s}\cos\xi_s}\right]\\ -r_{bs}\left[\sin\phi_2(\sin\xi_s-\theta_s\cos\xi_s)+\dfrac{\cos\phi_2}{m_{2s}\cos\xi_s}\right]\\ -r_{bs}(\cos\xi_s\pm\theta_s\sin\xi_s)\end{Bmatrix}, \tag{6}$$

式中：$\xi_s=\phi_s\pm(\theta_s+\theta_{os})$。

上述公式中：r_{bs}表示圆柱齿轮基圆半径；u_s表示圆柱齿轮齿宽方向参数；θ_s表示渐开线展角；θ_{os}表示齿廓初始角；$\boldsymbol{r}_s$表示渐开线齿廓方程；$\boldsymbol{r}_2$表示面齿轮齿面；n_2和n_s分别表示面齿轮和渐开线齿轮的转速。

1.2　齿面材料去除模型

如图2所示，Line 1为面齿轮与圆柱齿轮的接触线，c、d和e为接触线上的三点。在磨削过程中，砂轮的旋转运动完成对接触线上c、d和e三点处的材料去除。当转角ϕ_2和ϕ_s以传动比的关系旋转一个角度后，此时接触线由Line 1变为Line 2，通过砂轮的旋转运动和进给运动，实现对Line 2上f、g和h三点处的材料去除。

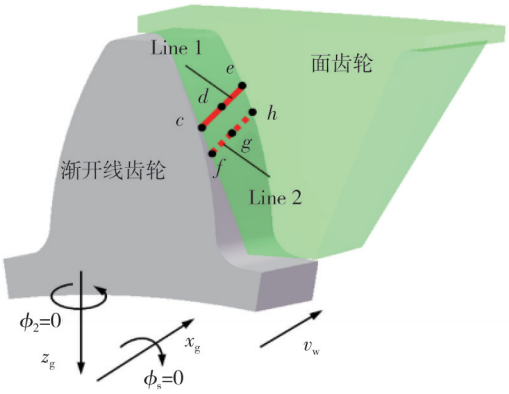


图2 面齿轮与圆柱齿轮啮合接触状态

Fig. 2 Meshing contact state between face gear and cylindrical gear

基于布尔运算的齿面材料去除模型描述如下：

1）虚拟渐开线齿轮的齿面用均匀分布的网格描述，u_s和θ_s分别表示渐开线齿轮上任意位置的宽度和展角，分别表示为

$$\begin{cases} u_s = i\Delta d, \\ \theta_s = \sqrt{\dfrac{2j\Delta d}{r_{bs}}}, \end{cases} \tag{7}$$

式中：Δd表示网格间距；i和j分别表示渐开线齿轮的齿宽和轮廓方向上的网格索引。

2）根据磨削原理，在虚拟渐开线齿轮的齿面网格坐标系中求解磨粒k的磨削深度。

3）根据齿轮啮合原理，将虚拟渐开线齿轮的磨削深度映射到面齿轮的表面，得到面齿轮的法向切削深度。

2 渐开线砂轮表面形貌建模

2.1 渐开线砂轮宏观廓形参数化

建立砂轮和圆柱齿轮廓形的空间坐标系：$S_{s0}(x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$表示圆柱齿轮的随动坐标系，$S_s(x_s, y_s, z_s)$表示圆柱齿轮的固定坐标系，$S_t(x_t, y_t, z_t)$表示砂轮的固定坐标系。其中，$z_t$轴与$z_s$轴平行，其垂直距离为$E$。具体见图3。

根据面齿轮的展成磨削原理，坐标系S_{s0}到坐标系S_s的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{s,s0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \tag{8}$$

由坐标系S_s到坐标系S_t的变换矩阵为

$$\boldsymbol{M}_{t,s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。 \tag{9}$$

渐开线砂轮的廓形为

$$\boldsymbol{r}_t(\theta_s, \phi_t) = \boldsymbol{M}_{t,s} \cdot \boldsymbol{M}_{s,s0} \cdot \boldsymbol{r}_s(\theta_s), \tag{10}$$

式中：α表示由渐开线变换为砂轮廓形的旋转角度，通过公式$\alpha = \dfrac{\pi}{z_1}$求解，$z_1$表示圆柱齿轮的齿数。

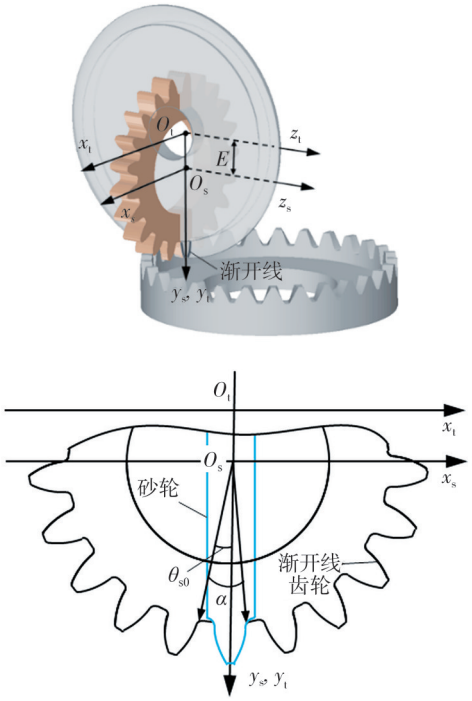


图3 圆柱齿轮和砂轮的变换坐标系

Fig. 3 Transformation coordinate systems of the cylindrical gear and grinding wheel

2.2 砂轮工作表面展开与磨粒随机布置

为了高效地建立砂轮模型，揭示齿面材料的去除机理，假设砂轮的磨粒为圆锥体。当然，也可以假设磨粒为椭球形、球形或其他几何形状，其建模方法与圆锥体磨粒的建模方法相同，具体见图4。

首先将渐开线砂轮铺展成为近似梯形，其上底长度l_t和下底长度l_r分别对应砂轮的齿顶圆和齿根圆周长，可以分别通过公式$l_t = 2\pi r_t$和$l_r = 2\pi r_r$求得。式中，r_t和r_r分别表示砂轮齿顶圆和齿根圆半径。梯形的高度h_w可以表示为

$$h_w = \frac{r_{bs} \cdot (\theta_{s\max}^2 - \theta_{s\min}^2)}{2}, \tag{11}$$

式中：$\theta_{s\max}$和$\theta_{s\min}$分别表示砂轮的齿顶圆展角和齿根圆展角。

将梯形区域沿着平行于高度方向κ和垂直于高度方向c划分磨粒的位置网格，网格宽度为L_m，梯形区域的磨粒总数量为n_g，磨粒的体积分数用ε

表示。磨粒总数量为n_g可以通过式(12)求得。

$$\sum_{s=1}^{n_g}\frac{1}{24}\pi d_s^3<\varepsilon\cdot V_{\text{wheel}}\cap\sum_{s=1}^{n_g+1}\frac{1}{24}\pi d_s^3>\varepsilon\cdot V_{\text{wheel}},\tag{12}$$

式中：$\varepsilon=1.5(37-N)\%$；N表示磨粒的组织号；d_s表示磨粒的底面半径，可以表示为$d_s=0.5(d_{\max}+d_{\min})+\xi$，其中$\xi$是调控磨粒底面直径的随机变量，其取值范围为$\left[-(d_{\max}-d_{\min})/2,(d_{\max}-d_{\min})/2\right]$。

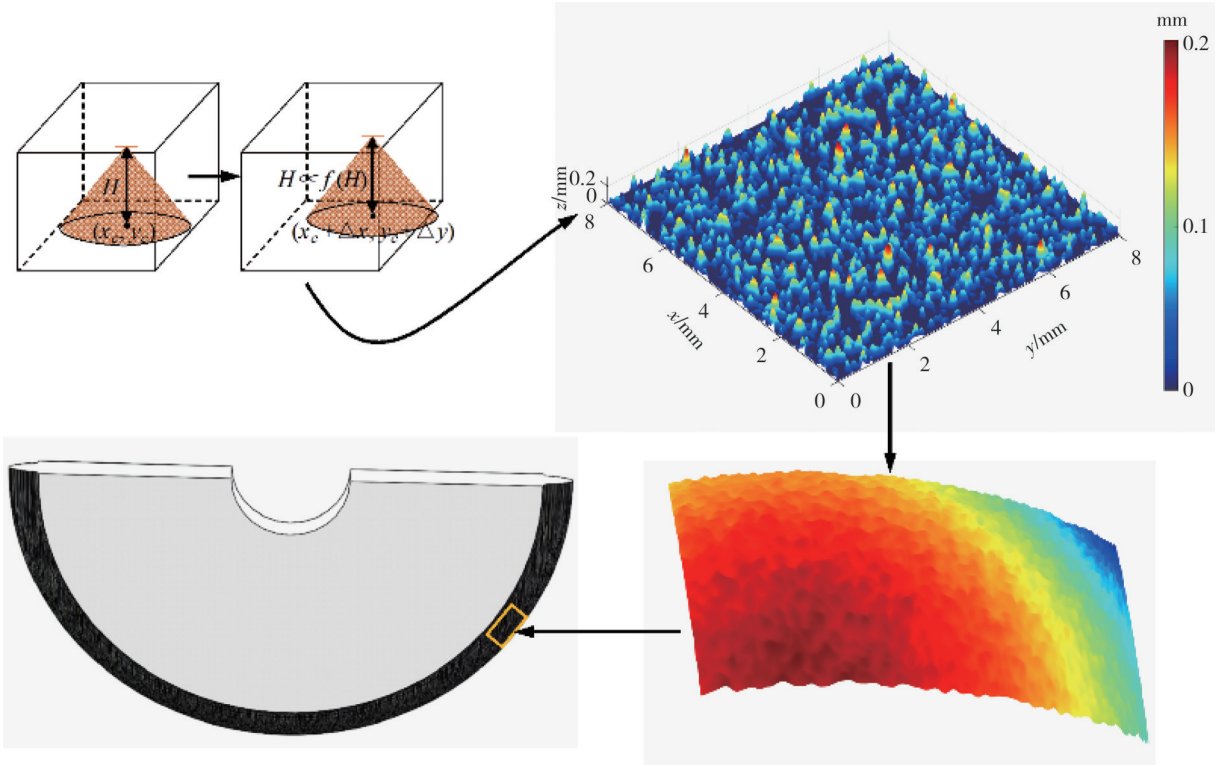


图 4　渐开线廓形砂轮的数字模型（砂轮目数为 80，加工的面齿轮模数为 3mm）

Fig. 4　Digital model of an involute profile grinding wheel (grit size 80, machining a face gear with a module of 3 mm)

3　面齿轮展成磨削关键特征参数表征

3.1　磨削宽度

在面齿轮展成磨削中，磨削宽度随着齿面的磨削位置发生变化，其求解示意图如图 5 所示。

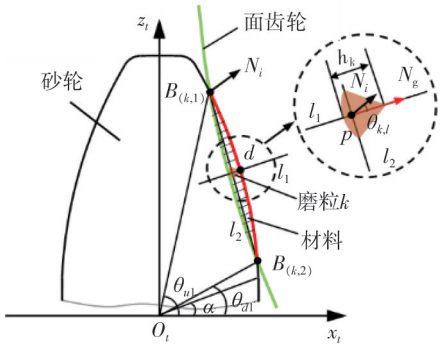


图 5　磨削宽度求解示意图

Fig. 5　Schematic diagram for determining the grinding width

设第k颗磨粒在齿面上的材料去除边界点分别为$B_{k,1}$和$B_{k,2}$，其在砂轮坐标系中的坐标为

$$B_{k,1}=(x_{k,1},z_{k,1}),B_{k,2}=(x_{k,2},z_{k,2}),\tag{13}$$

则第k颗磨粒对应的局部磨削宽度可表示为

$$b_k=\|B_{k,2}-B_{k,1}\|=\sqrt{(x_{k,2}-x_{k,1})^2+(z_{k,2}-z_{k,1})^2}。\tag{14}$$

若在局部近似条件下，材料去除边界主要沿齿面横向展开，则式(14)可简化为

$$b_k=|x_{k,2}-x_{k,1}|,\tag{15}$$

式中：b_k表示第k颗磨粒的局部磨削宽度。对于第n条磨削路径，可用磨削宽度方向上的有效磨粒数量N_{eff}表示磨削宽度

$$b_n=\sum_{k=1}^{N_{\text{eff}}}b_k。\tag{16}$$

3.2　接触弧长

设第k颗磨粒在面齿轮坐标系中的瞬时位置矢量为$\boldsymbol{P}_k(t)$，其相对齿面的瞬时速度为

$$v_k(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_k(t)}{\mathrm{d}t}\right\|。\tag{17}$$

若磨粒进入和离开齿面接触区的时刻分别为t_{in}和t_{out}，则第k颗磨粒的接触弧长为

$$l_k=\int_{t_{in}}^{t_{out}} v_k(t)\,\mathrm{d}t。\tag{18}$$

在进行数值计算的过程中，磨粒轨迹可离散为多个时间步，接触弧长也可写成相邻轨迹点距离的累加

$$l_k\approx\sum_{m=1}^{M-1}\|p_k(t_{m+1})-p_k(t_m)\|。\tag{19}$$

若定义接触判别函数$C_k(t)$为

$$C_k(t)=\begin{cases}1, & P_k^f(t)\in\Omega_c,\\ 0, & P_k^f(t)\notin\Omega_c,\end{cases}\tag{20}$$

则磨粒有效接触时间可写为

$$\tau_k=\int_{t_{in}}^{t_{out}} C_k(t)\,\mathrm{d}t。\tag{21}$$

接触弧长较大时，磨粒作用更连续，材料去除带更完整；接触弧长较小时，磨粒作用局限在较短区域，齿面纹理更容易出现间断。

3.3 有效磨粒数量

砂轮表面覆盖有大量磨粒，但仅有达到有效切入条件的磨粒参与磨削。设第k颗磨粒的未变形切屑厚度为$h_{m,k}$，滑擦与犁耕分界厚度为h_{plou}(本文记作h_{p^*})，犁耕与稳定切削的临界切削厚度为h_{cut}(本文记作h_c)，则磨粒有效性函数可定义为

$$I_k=\begin{cases}1, & h_{u,k}\geqslant h_c,\\ 0, & h_{u,k}\leqslant h_c,\end{cases}\tag{22}$$

则某一时刻或某一磨削路径内的有效磨粒数量为

$$N_{eff}=\sum_{k=1}^{N_g} I_k,\tag{23}$$

式中：N_g为砂轮磨粒总数。若$h_{m,k}<h_{p^*}$，磨粒主要发生弹性滑擦，不计入有效切削磨粒；若$h_{p^*}\leqslant h_{m,k}<h_c$，磨粒以犁耕和塑性挤压为主；若$h_{m,k}\geqslant h_c$，则认为磨粒进入稳定切削状态。为进一步描述磨粒参与程度，可定义有效磨粒比例

$$\lambda_{eff}=\frac{N_{eff}}{N_g}。\tag{24}$$

当有效磨粒比例较小时，材料去除主要由少量突出磨粒完成，齿面上容易出现较深沟槽和较大峰谷差异；当有效磨粒比例增大时，单位面积内参与切削的磨粒数量增加，纹理分布更细密，局部峰谷也更容易被削弱。若接触区域面积为A_c，有效磨粒密度可表示为

$$\rho_{eff}=\frac{N_{eff}}{A_c}。\tag{25}$$

h_{p^*}和h_c的取值由砂轮-工件材料组合共同决定。根据磨削阶段划分，未变形切屑厚度h_m用于判断磨粒所处阶段：$h_m<h_{plou}$时为滑擦阶段，$h_{plou}<h_m<h_{cut}$时为犁耕阶段，$h_m>h_{cut}$时为切削阶段。本文采用单颗磨粒切削实验或文献初值给出h_{plou}、h_{cut}的初始范围，并以基准工况实测Sa为标定目标，最小化仿真粗糙度与实验粗糙度之间的误差后确定h_{p^*}与h_c；标定后两者在其余工况中保持不变，以避免针对不同实验点重复调参。

对于第n条磨削路径，有效磨粒数量可进一步写为

$$N_{eff,n}=\sum_{k=1}^{N_g} I_{n,k},\tag{26}$$

式中：$I_{n,k}$表示第n条路径中第k颗磨粒是否参与有效切削。

3.4 未变形切屑厚度

未变形切屑厚度用于判断磨粒与齿面接触后的作用状态。切入深度较小时，工件表面主要发生弹性变形或轻微滑擦；切入深度继续增大后，材料会发生塑性挤压并形成犁沟；只有当未变形切屑厚度超过临界切削厚度时，磨粒才形成稳定切屑并产生有效材料去除。

设齿面网格点$G(i,j)$的位置矢量为$\boldsymbol{P}_{ij}$，其单位法向量为$\boldsymbol{n}_{ij}$，第k颗磨粒在时刻t的尖端位置为$P_{k(t)}$，则磨粒沿齿面法向的切入深度为

$$a_{n,k}(i,j,t)=[P_k^f(t)-\boldsymbol{P}_{ij}]\cdot\boldsymbol{n}_{ij}。\tag{27}$$

当$\delta k(i,j,t)>0$时，磨粒进入齿面材料区域；当$\delta k(i,j,t)\leqslant 0$时，磨粒未形成有效切入。由此，未变形切屑厚度可表示为

$$h_{u,k}(i,j,t)=\max[0,a_{n,k}(i,j,t)]。\tag{28}$$

若进一步考虑磨粒突出高度$h_{p,k}$对切入深度的影响，则有

$$h_{u,k}(i,j,t)=\max[0,a_{n,k}(i,j,t)+h_{p,k}],\tag{29}$$

式中：h_k表示第k颗磨粒的突出高度。由于该高度具有随机性，可采用统计分布描述为

$$h_{p,k}\sim N(\mu_h,\sigma_h^2)。\tag{30}$$

根据未变形切屑厚度的大小，磨粒作用状态可划分为滑擦、犁耕和切削三个阶段

$$S_k=\begin{cases}\text{滑擦}, & 0<h_{u,k}\leqslant h_{\mathrm{r}},\\ \text{犁耕}, & h_{\mathrm{r}}<h_{u,k}\leqslant h_{\mathrm{c}},\\ \text{切削}, & h_{u,k}>h_{\mathrm{c}},\end{cases}\tag{31}$$

式中：h_{p*}表示滑擦与犁耕的分界厚度；h_c表示犁耕与稳定切削的临界切削厚度。相应地，单颗磨粒对齿面网格点的材料去除深度可写为

$$\Delta h_k(i,j,k)=\begin{cases}0, & h_{u,k}(i,j,t)\leqslant h_{\mathrm{c}},\\ h_{u,k}(i,j,t)-h_{\mathrm{c}}, & h_{u,k}(i,j,t)\geqslant h_{\mathrm{c}}。\end{cases}\tag{32}$$

4　表面形貌预测与方法验证

4.1　表面形貌预测流程

面齿轮设计参数见表 1，砂轮与磨削工艺参数见表 2。

面齿轮展成磨削表面形貌仿真流程如图 6 所示。首先输入面齿轮几何参数、砂轮廓形参数、磨粒随机分布参数和磨削工艺参数，并初始化磨削轨迹参数、齿宽位置参数、磨粒标志参数及齿面高度场 $H_0(X,Z)$。随后根据面齿轮设计参数和展成运动关系规划磨削轨迹，依次计算磨削宽度、单颗磨粒接触弧长、有效磨粒数量和未变形切屑厚度。最后依据离散布尔差更新规则逐点更新齿面高度场，遍历全部磨削轨迹、齿宽位置、磨粒编号和时间步后，得到最终齿面形貌 $H(X,Z)$，并进一步计算 Sa 等粗糙度指标。

表 1　面齿轮主要设计参数

Tab. 1　Main design parameters of face gears

设计参数	数值
圆柱齿轮齿数	21
面齿轮齿数	28
压力角/(°)	20
模数/mm	3
轴交角/(°)	90
面齿轮内半径/mm	43
面齿轮外半径/mm	47

表 2　砂轮及磨削工艺参数

Tab. 2　Parameters of the grinding wheel and grinding process

参数	数值
砂轮外径/mm	150
磨粒材料	CBN
砂轮目数	300
砂轮转速 n/(r•min^{-1})	2000
工件进给速度 v_w(m•min^{-1})	1.2
磨削深度 a_p/mm	0.01
典型砂轮分度角 $\Delta\theta$/(°)	0.50, 0.75, 1.00, 1.25
齿面展开区域/mm	X=43～47, Z=0～6.75

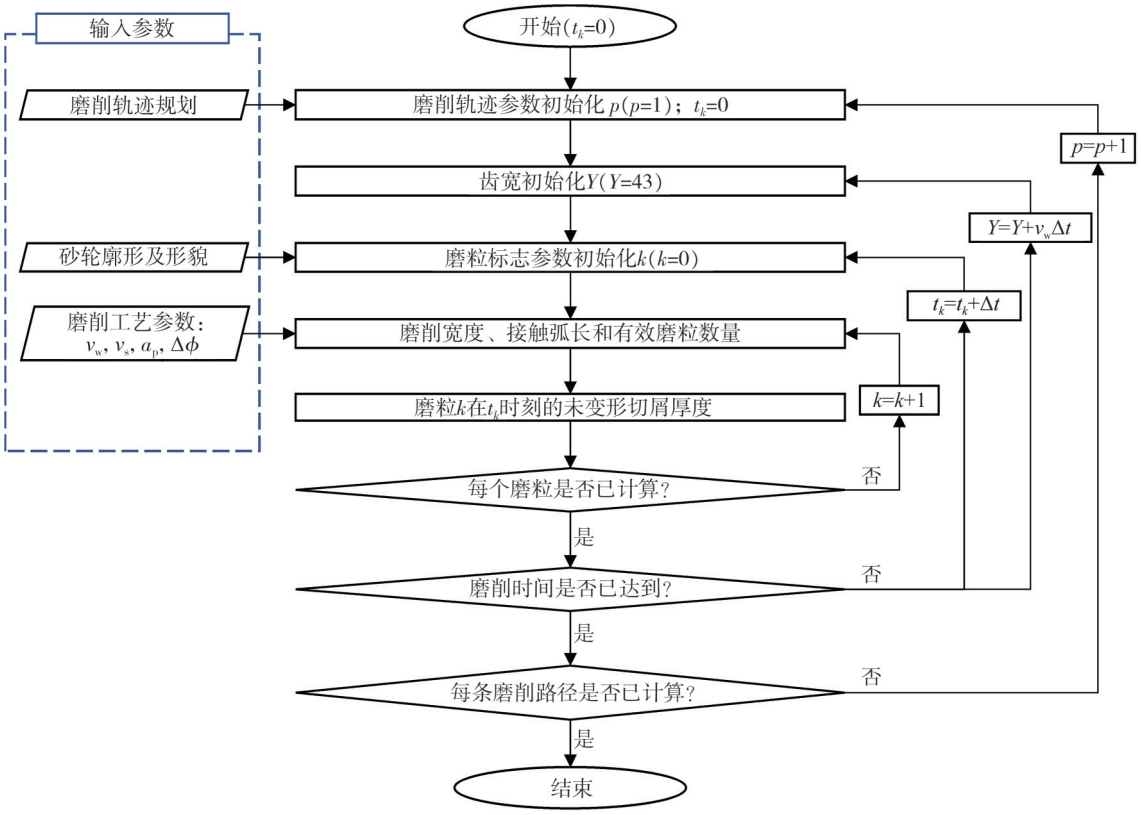
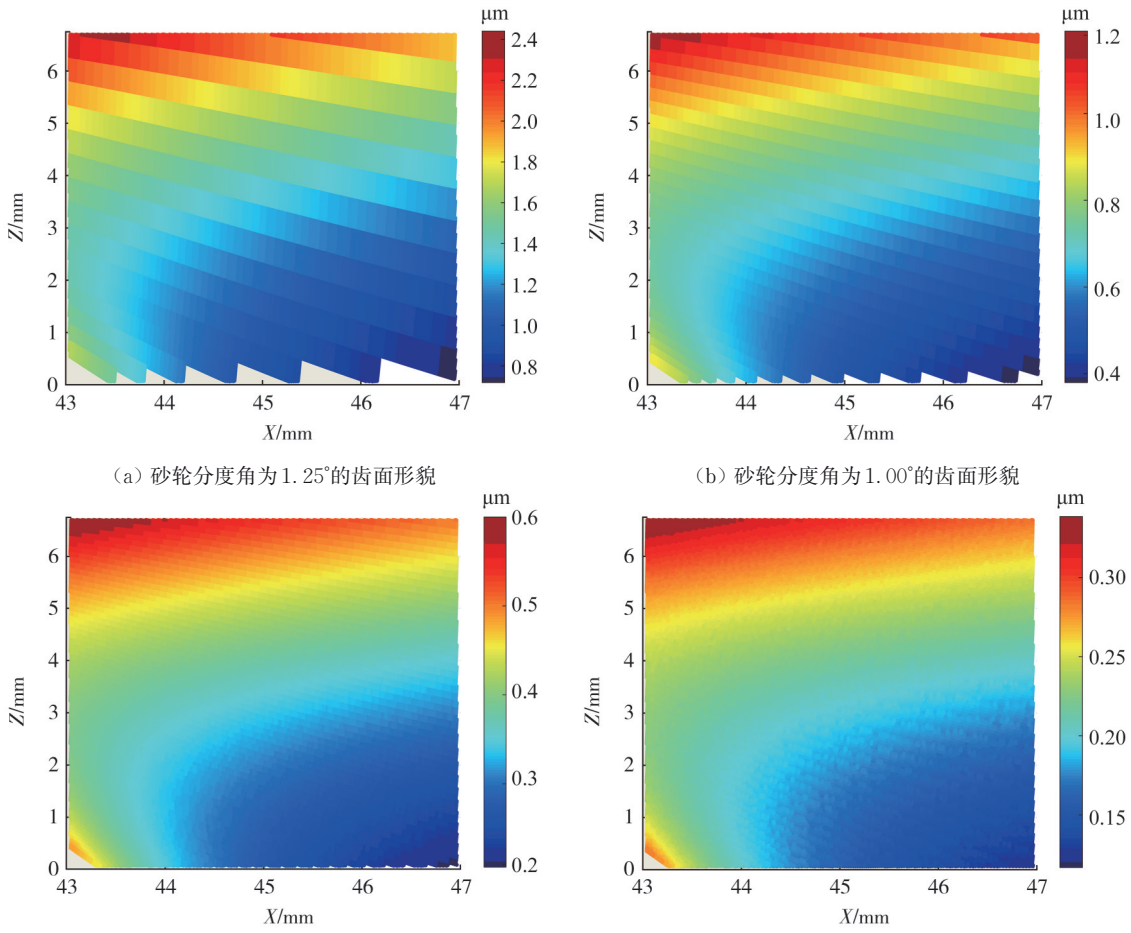


图 6　面齿轮展成磨削表面形貌预测流程

Fig. 6　Prediction process of the unfolded surface morphology of face gears in grinding

4.2 表面形貌仿真结果

砂轮分度角指相邻两条展成磨削接触线对应的工件转角步距，属于数控轨迹规划参数，并非砂轮安装角或砂轮本体物理属性。分度角越小，单位齿面区域内的磨削路径数量越多，路径重叠率 η 越高，材料去除越均匀；分度角过大时易产生包络盲区，造成齿面加工残差增大。本文选择砂轮分度角分别为1.25°、1.00°、0.75°和0.50°，其余工艺参数保持不变(径向进给速度 v_w=1.2 m/min，砂轮转速 n=2 000 r/min，磨削深度 a_p=10 μm)，完成表面形貌仿真。图7中，X为齿面展开后的径向坐标，正方向由面齿轮内径指向外径；Z为齿高方向坐标，Z=0靠近齿根，Z增大表示由齿根向齿顶过渡；右侧色标表示包络残差幅值。由图7可知，在X坐标固定时，包络残差随着齿高的增大逐渐增大；当齿高位置固定时，包络残差沿着内径到外径方向逐渐减小。



(a) 砂轮分度角为1.25°的齿面形貌　(b) 砂轮分度角为1.00°的齿面形貌

(c) 砂轮分度角为0.75°的齿面形貌　(d) 砂轮分度角为0.50°的齿面形貌

图7 不同砂轮分度角条件下的齿面形貌

Fig. 7 Distribution of tooth-surface envelope residuals under different grinding wheel indexing angles

由图7可知：在相同的加工参数下，齿面形貌存在区域性差异，具体表现为齿顶区域的表面形貌起伏较大，齿中区域次之，齿根区域的表面形貌起伏最小；齿面内径区域的表面形貌起伏大于齿面外径区域。

4.3 方法验证与分析

面齿轮齿面属于复杂空间曲面，其精密加工需采用五轴联动数控装备。本文选用Makino V33-5XB五轴立式加工中心开展磨削试验，原因在于该平台能够实现A轴、C轴与直线进给轴的协调控制，可复现本文模型所需的展成运动关系和径向进给过程；试验目的为验证齿面形貌预测模型和工艺参数变化规律，而非替代专用齿轮磨床的批量加工工况。

结合实验室设备条件和前期工艺试验，本文参考郭辉等[11]和Wang等[12]的研究成果确定加工参数，如表3所示。

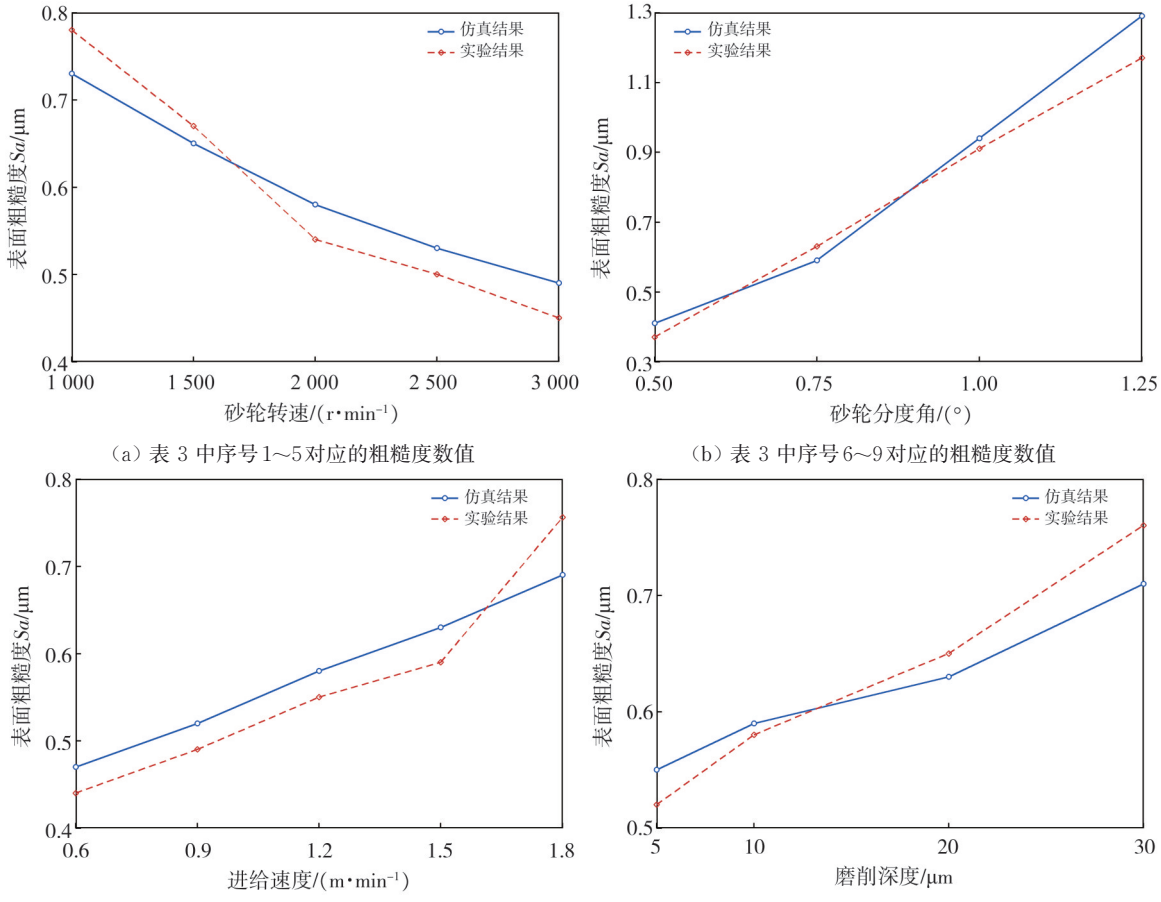
表 3　不同工艺参数下齿面粗糙度仿真值与实验值对比

Tab. 3　Comparison of simulated and experimental tooth surface roughness under different process parameters

序号	砂轮转速(r•min^{-1})	分度角/(°)	进给速度/(m•min^{-1})	磨削深度/μm	仿真Sa/μm	实验Sa/μm	误差/%
1	1 000	0.75	1.2	10	0.73	0.78	6.85
2	1 500	0.75	1.2	10	0.65	0.67	3.08
3	2 000	0.75	1.2	10	0.58	0.54	−6.90
4	2 500	0.75	1.2	10	0.53	0.50	−5.66
5	3 000	0.75	1.2	10	0.49	0.45	−8.16
6	2 000	0.50	1.2	10	0.41	0.37	−9.76
7	2 000	0.75	1.2	10	0.59	0.63	6.78
8	2 000	1.00	1.2	10	0.94	0.91	−3.19
9	2 000	1.25	1.2	10	1.29	1.17	−9.30
10	2 000	0.75	0.6	10	0.47	0.44	−6.38
11	2 000	0.75	0.9	10	0.52	0.49	−5.77
12	2 000	0.75	1.2	10	0.58	0.55	−5.17
13	2 000	0.75	1.5	10	0.63	0.59	−6.35
14	2 000	0.75	1.8	10	0.69	0.756	9.57
15	2 000	0.75	1.2	5	0.55	0.52	−5.45
16	2 000	0.75	1.2	10	0.59	0.58	−1.69
17	2 000	0.75	1.2	20	0.63	0.65	3.17
18	2 000	0.75	1.2	30	0.71	0.76	7.04

为方便测量齿面的表面粗糙度，在测量前采用线切割技术切割轮齿，并对齿面进行超声清洗。采用基恩士 VH-Z500R 超景深显微镜测量工件表面形貌。各组参数均完成 3 次重复试验；每组试验在齿宽中点区域选取齿高 1.5 mm、3.5 mm、5.5 mm 三个测量位置，分别代表齿根过渡区、齿中区域和靠近齿顶区域，每个位置测量 3 次并取期望值作为最终结果。

图 8 给出了不同工艺参数下齿面粗糙度预测值与实验值的对比结果。



（a）表 3 中序号 1～5 对应的粗糙度数值　（b）表 3 中序号 6～9 对应的粗糙度数值

（c）表 3 中序号 10～14 对应的粗糙度数值　（d）表 3 中序号 15～18 对应的粗糙度数值

图 8　不同工艺参数下齿面粗糙度预测值与实验值对比

Fig. 8　Comparison of predicted and experimental values of gear surface roughness under different process parameters

整体来看，在砂轮转速 1 000～3 000 r/min、砂轮分度角 0.50°～1.25°、砂轮沿齿轮径向进给速度 0.6～1.8 m/min 和磨削深度 5～30 μm 的加工条件下，各工况下仿真值与实验值的变化趋势基本一致，相

对误差控制在10%左右，说明该方法能够反映砂轮转速、分度角、进给速度和磨削深度变化对齿面粗糙度的影响。

由图8可知：在表3所列单因素试验条件下，除被考察因素外，其余参数均固定在基准水平(n=2 000 r/min，分度角0.75°，径向进给速度1.2 m/min，磨削深度10 μm，具体取值随单因素组别相应调整)。齿面粗糙度与砂轮转速呈负相关，与砂轮分度角、径向进给速度及切削深度呈正相关。砂轮分度角是影响齿面粗糙度最明显的工艺参数。需要说明的是，本文实验设计主要用于验证模型对主效应变化趋势的预测能力，尚未建立包含交互项的响应面模型；多因素交互作用及全局最优组合将在后续工作中通过正交试验或响应面设计进一步研究。根据磨削原理分析可得：

1）随着砂轮转速的增加，单位时间内参加切削的总磨粒数量增加，齿面材料被不断磨削去除，齿面粗糙度变小。

2）随着进给速度的增加，磨削接触弧长内参加工作的磨粒数量减少，参与切削的每颗磨粒的未变形切屑平均厚度增大，齿面粗糙度增大。

3）当增大切削深度时，增加了砂轮与齿面的磨削宽度和接触弧长，增大了每颗磨粒的未变形切屑平均厚度，齿面粗糙度增大。

4.4 砂轮分度角对表面形貌均匀性的影响

表4给出了不同砂轮分度角条件下的齿面包络残差分布。分度角较大时，齿面上部和局部边界区域出现明显高包络残差区，残差分布区域性较强；随着分度角减小，高包络残差区逐渐收缩，残差梯度也变得平缓。当分度角继续减小时，齿面整体包络残差水平进一步降低，说明路径覆盖增强能够有效削弱局部峰谷残留。

表4 不同砂轮分度角下最大包络残差及形貌特征

Tab. 4 Maximum envelope residuals and morphological characteristics at different grinding wheel indexing angles

砂轮分度角/(°)	残差范围/μm	最大包络残差/μm	形貌特征	工艺评价
1.25	0.80～2.40	约2.40	高残差区明显，纹理波动较大	效率较高，均匀性较差
1.00	0.40～1.20	约1.20	高残差区缩小	表面质量改善
0.75	0.20～0.60	约0.60	残差分布趋于平缓	形貌较均匀
0.50	0.12～0.35	约0.30	整体残差最低	表面最平滑，但效率较低

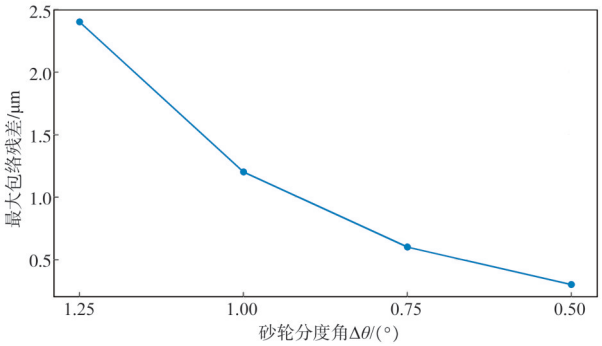


图9 不同砂轮分度角下的最大包络残差变化

Fig. 9 Variation of maximum envelope residual under different grinding wheel indexing angles

由表4和图9可见，随着砂轮分度角减小，最大包络残差由约2.40 μm降低至约0.30 μm，高包络残差区也明显缩小。

该结果表明，路径重叠程度是影响齿面形貌均匀性的关键因素。然而，分度角并非越小越好，分度角过小会增加磨削路径数量和加工时间，降低加工效率。本文所称“改变不同区域的砂轮分度角”是指在离线轨迹规划阶段，根据齿顶、齿根及内外径区域的残差分布为不同齿面区域分配不同的展成角步距，并通过数控系统多轴联动执行等效轨迹补偿，而不是实时改变砂轮物理安装角。实际加工中，可对包络残差较大或路径覆盖不足的区域采用较小角步距，在形貌较稳定区域保持较大角步距，以兼顾表面质量和加工效率。

5 结 论

本文针对面齿轮展成磨削，基于面齿轮副的传动啮合原理，建立了面齿轮齿面材料去除模型，提出了表面形貌预测方法，揭示了齿面的创成机理。探究了磨削工艺参数对齿面粗糙度的作用规律，揭示了砂轮分度角对齿面粗糙度和形貌均匀性的作用机制，提出了基于分区轨迹规划优化齿面形貌的措施。主要结论包括：

1）根据面齿轮的展成磨削原理，推导得到了磨粒在接触弧长内的未变形切屑厚度和磨削接触区域任意位置的未变形切屑厚度。结合磨削实验，从材料去除的宏观和微观角度，揭示了面齿轮展成磨削的齿面创成机理。

2）仿真与实验对比结果表明齿面粗糙度模型的相对误差低于9.76%，证明了面齿轮展成磨削表面形貌预测模型的有效性。此外，分析了磨削

工艺参数对齿面粗糙度的影响作用，发现齿面粗糙度与砂轮转速呈负相关，与砂轮分度角、径向进给速度以及切削深度呈正相关。

3）分析了砂轮分度角对齿面粗糙度和形貌均匀性的影响作用，结果表明：随着砂轮分度角的减小，相邻磨削路径重叠率η增大，高包络残差区收缩，最大包络残差由约 2.40 μm 降低至约 0.30 μm。通过对不同齿面区域采用差异化展成角步距进行离线轨迹规划，可在保证加工效率的同时获得更均匀的齿面形貌。

利益冲突声明/Conflict of Interests

所有作者声明不存在利益冲突。

All authors declare no relevant conflict of interests.

参考文献：

[1] Heath G, Fisher D, Lewicki D, et al. Helical face gear development under the enhanced rotorcraft drive system program[C]//Proceedings of the Vertical Flight Society 67th Annual Forum and Technology Display - Forum 67 - Virginia Beach, Virginia 2011, 2011: 1-12.

[2] Lewicki D G, Heath G F. Advanced face gear surface durability evaluations: NASA/TM-2016-218943 [R]. 2016.

[3] Litvin F L, Zhang Y, Wang J C, et al. Design and geometry of face-gear drives[J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(4): 642-647.

[4] Litvin F L, Wang J C, Bossler R B, et al. Application of face-gear drives in helicopter transmissions[J]. Journal of Mechanical Design, 1994, 116(3): 672-676.

[5] Litvin F L, Fuentes A, Zanzi C, et al. Face-gear drive with spur involute pinion: geometry, generation by a worm, stress analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(25/26): 2785-2813.

[6] Tang J Y, Yin F, Chen X M. The principle of profile modified face-gear grinding based on disk wheel[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70: 1-15.

[7] 唐进元，周恒．蜗杆砂轮曲面与面齿轮齿面的对应关系[J]．中南大学学报（自然科学版），2017，48(1)：99-105.
Tang Jinyuan, Zhou Heng. Relationship between surfaces on worm wheel and on face-gear[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2017, 48(1): 99-105. (in Chinese)

[8] 崔伟，唐进元，周镇宇．含蜗杆砂轮安装误差的面齿轮副齿面接触分析[J]．机械传动，2016，40(7)：6-11.
Cui Wei, Tang Jinyuan, Zhou Zhenyu. Tooth surface contact analysis of the face gear pair involving the worm wheel installation error[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2016, 40(7): 6-11. (in Chinese)

[9] 唐进元，尹凤，张燕．格里森 CONIFACE 面齿轮磨齿加工原理与误差分析[J]．机械传动，2012，36(12)：8-11.
Tang Jinyuan, Yin Feng, Zhang Yan. Research on the machining principle and error analysis of gleason CONIFACE grinding method for face gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2012, 36(12): 8-11. (in Chinese)

[10] 郭辉，赵宁，项云飞，等．六轴数控蜗杆砂轮磨齿机磨削面齿轮的方法[J]．机械工程学报，2015，51(11)：186-194.
Guo Hui, Zhao Ning, Xiang Yunfei, et al. Face gear grinding method using six-axis CNC worm wheel machine [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(11): 186-194. (in Chinese)

[11] 郭辉，赵宁，张淑艳．基于碟形砂轮磨齿的面齿轮包络残差研究[J]．航空动力学报，2014，29(11)：2743-2750.
Guo Hui, Zhao Ning, Zhang Shuyan. Envelope residuals research of face gear based on disc grinding wheel tooth grinding[J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(11): 2743-2750. (in Chinese)

[12] Wang Y Z, Lan Z, Hou L, et al. A precision generating grinding method for face gear using CBN wheel [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2015, 79(9): 1839-1848.

[13] 王延忠，赵洪铺，兰州，等．航空面齿轮复杂型面数控磨削数值分析[J]．机械传动，2015，39(12)：7-11.
Wang Yanzhong, Zhao Hongpu, Lan Zhou, et al. Numerical analysis of CNC-grinding process based on complex surface of aviation face gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2015, 39(12): 7-11. (in Chinese)

[14] 王延忠，赵洪铺，兰州，等．基于航空环境的面齿轮磨珩复合磨削加工方法[J]．北京航空航天大学学报，2016，42(4)：646-653.
Wang Yanzhong, Zhao Hongpu, Lan Zhou, et al. Method of face gear grinding-honing machining based on aviation environment[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2016, 42(4): 646-653. (in Chinese)

[15] 王延忠, 侯良威, 兰州, 等. 渐开线碟形砂轮磨削面齿轮数控加工研究[J]. 航空动力学报, 2015, 30(8): 2033-2041.
Wang Yanzhong, Hou Liangwei, Lan Zhou, et al. Research on processing method of grinding face gear with involute disc wheel[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(8): 2033-2041. (in Chinese)

[16] Wang Y Z, Liu Y, Chu X M, et al. Calculation model for surface roughness of face gears by disc wheel grinding [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2017, 123: 76-88.

[17] Tao Y J, Li G L, Cao B, et al. Grinding worm wear evaluation and its influence on gear surface topography in continuous generating gear grinding[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2022, 123(9): 3301-3311.

[18] Mallipeddi D, Norell M, Sosa M, et al. The effect of manufacturing method and running-in load on the surface integrity of efficiency tested ground, honed and superfinished gears[J]. Tribology International, 2019, 131: 277-287.

[19] Arora K, Singh A K. Theoretical and experimental investigation on surface roughness of straight bevel gears using a novel magnetorheological finishing process[J]. Wear, 2021, 476: 203693.

[20] Zhu J J, Ma L, Dwyer-Joyce R. Friction and wear behaviours of self-lubricating peek composites for articulating pin joints[J]. Tribology International, 2020, 149: 105741.

[21] Zhang X H, Wei P T, Parker R G, et al. Study on the relation between surface integrity and contact fatigue of carburized gears[J]. International Journal of Fatigue, 2022, 165: 107203.

[22] Brinksmeier E, Aurich J C, Govekar E, et al. Advances in modeling and simulation of grinding processes[J]. CIRP Annals, 2006, 55(2): 667-696.

[23] Rowe W B. Principles of modern grinding technology [M]. 2nd ed. Oxford: William Andrew/Elsevier, 2014.

[24] Klocke F. Manufacturing processes 2: grinding, honing, lapping[M]. Berlin: Springer, 2009.

[25] Malkin S, Guo C. Grinding technology: theory and applications of machining with abrasives[M]. 2nd ed. New York: Industrial Press, 2008.

[26] Shaw M C. Principles of abrasive processing [M]. Oxford: Oxford University Press, 1996: 55-60.

[27] Nguyen T A, Butler D L. Simulation of precision grinding process, part 1: generation of the grinding wheel surface[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2005, 45(11): 1321-1328.

[28] Darafon A, Warkentin A, Bauer R. 3D metal removal simulation to determine uncut chip thickness, contact length, and surface finish in grinding[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 66(9): 1715-1724.

[29] Zhou W H, Tang J Y, Shao W. Study on surface generation mechanism and roughness distribution in gear profile grinding[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 187: 105921.

[30] Zhou Z X, van Lutterwelt C A. The real contact length between grinding wheel and workpiece: a new concept and a new measuring method[J]. CIRP Annals, 1992, 41(1): 387-391.

[31] Osa J L, Sánchez J A, Ortega N, et al. Discrete-element modelling of the grinding contact length combining the wheel-body structure and the surface-topography models [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2016, 110: 43-54.

[32] Mao C, Zhou Z X, Zhou D W, et al. Analysis of influence factors for the contact length between wheel and workpiece in surface grinding [J]. Key Engineering Materials, 2007, 359: 128-132.

[33] 尤芳怡, 徐西鹏. 平面磨削中金刚石砂轮有效磨粒数的研究[J]. 中国机械工程, 2007, 18(9): 1092-1096.
You Fangyi, Xu Xipeng. Study on the active grains on diamond wheels in surface grinding[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(9): 1092-1096. (in Chinese)

[34] 任敬心, 华定安. 磨削原理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011: 26-36.

[35] Komanduri R, Lucca D A, Tani Y. Technological advances in fine abrasive processes[J]. CIRP Annals, 1997, 46(2): 545-596.

[36] Agarwal S, Khare S K, Pandey V P, et al. An analytical chip thickness model for performance assessment in silicon carbide grinding[J]. Procedia Manufacturing, 2017, 10: 298-306.

[37] Wu C J, Dong W J, Zhu L J, et al. Modeling of grinding chip thickness distribution based on material removel mode in grinding of SiC ceramics [J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2020, 14(1): 1-11.

[38] Qu C, Lü Y J, Yang Z Y, et al. An improved chip-thickness model for surface roughness prediction in robotic belt grinding considering the elastic state at contact wheel-workpiece interface [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019, 104(5): 3209-3217.