

文章编号: 1673-3193(2024)01-0030-06

给定悬挂点个数的分子树的ISDD指数的极值

赵芳方, 邵燕灵

(中北大学 数学学院, 山西 太原 030051)

摘要: 设 $G=(V(G), E(G))$ 为 n 阶连通图, 其顶点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$, 用 $deg(x)$ 表示顶点 x

的度, 则图 G 的反对称分割指数为 $ISDD(G)=\sum_{x,y\in E(G)}\left(\frac{deg(x)\cdot deg(y)}{deg(x)^2+deg(y)^2}\right)$ 。本文主要采用不等式和分类

讨论法对具有固定悬挂点的分子树的 $ISDD$ 指数进行了研究, 分别讨论了悬挂点个数为偶数和悬挂点个数大于等于3时分子树的 $ISDD$ 指数的极值, 分子树是指顶点度不超过4的树。首先, 确定了当悬挂点个数为偶数时, 分子树中反对称分割指数为最小值, 此时, $ISDD(MT)=\frac{1}{2}n-\frac{31}{85}p-\frac{1}{10}$; 其次, 确定了当悬挂点个数大于等于3时, 分子树中反对称分割指数为最大值, 此时, $ISDD(MT)=\frac{1}{2}n-\frac{9}{65}p-\frac{1}{2}$, 并刻画了达到 $ISDD$ 指数极值的分子树。

关键词: 图; 反对称分割指数 (ISDD 指数); 悬挂点; 分子树

中图分类号: O178

文献标识码: A

doi: 10.3969/j.issn.1673-3193.2024.01.004

引用格式: 赵芳方, 邵燕灵. 给定悬挂点个数的分子树的ISDD指数的极值[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2024, 45(1): 30-35.

ZHAO Fangfang, SHAO Yanling. Extremal ISDD index of molecular trees with fixed number of pendent vertices[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2024, 45(1): 30-35.

Extremal ISDD Index of Molecular Trees with Fixed Number of Pendent Vertices

ZHAO Fangfang, SHAO Yanling

(School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Let $G=(V(G), E(G))$ be a connected graph of order n , $V(G)$ be vertex set of G , $E(G)$ be edge set of G , $deg(x)$ be degree of the vertex x . The inverse symmetric division deg index of G is

$ISDD(G)=\sum_{x,y\in E(G)}\left(\frac{deg(x)\cdot deg(y)}{deg(x)^2+deg(y)^2}\right)$. Inequality and classification discussion are used to study the

$ISDD(G)$ of molecular tree with fixed number of pendent vertices, respectively, the extreme value of the $ISDD$ index of the molecular tree with the number of pendent vertices is even number and the number of pendent vertices is more than or equal to 3 are discussed, the tree whose vertex degree is less than 4 is called molecular tree. Firstly, the minimum value of the inverse symmetric division deg index of G is

收稿日期: 2022-11-18

基金项目: 山西省自然科学基金资助项目(201901D211227)

作者简介: 赵芳方(1997-), 女, 硕士, 主要从事图论、组合数学方向的研究。

通信作者: 邵燕灵(1963-), 女, 教授, 博士, 主要从事图论、组合数学方向的研究。E-mail: ylshao@nuc.edu.cn.

determined when the number of pendent vertices is even, that is $ISDD(MT) = \frac{1}{2}n - \frac{31}{85}p - \frac{1}{10}$. Secondly, when the number of pendent vertices is greater than or equal to 3, the maximum value of the inverse symmetric division deg index of G in the molecular tree is determined, that is $ISDD(MT) = \frac{1}{2}n - \frac{9}{65}p - \frac{1}{2}$, and the molecular tree of $ISDD$ index reaching the extreme value is described.

Key words: graph; inverse symmetric division deg index ($ISDD$ index); pendent vertex; molecular tree

0 引言

本文所考虑的图均为简单无向连通图。设 $G=(V(G), E(G))$ 为 n 阶 m 条边的无向图, 其顶点集为 $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$, $deg(x)$ 为顶点 x 的度, $x \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; 用 $e=xy$ 表示其端点为 x, y 的边, 若 $deg(x)=1$, 则称 x 为悬挂点。用 n_k 表示度为 k 的顶点个数, 用 $m_{i,j}$ 表示图 G 中满足 $deg(x)=i, deg(y)=j$ 的边 xy 的个数^[1]。设 $G+xy$ 和 $G-xy$ 分别表示图 G 通过添加一条边 $xy \notin E(G)$ 和删掉一条边 $xy \in E(G)$ 而得到的图, 其中, $x, y \in V(G)$ 。用 S_n 表示 n 阶星图, 用 $P_r = w_0 w_1 \dots w_r$ 表示在图 G 中满足 $deg(w_i)=2 (i=1, 2, \dots, r-1)$ (除 $r=1$ 外) 的路, 如果 P_r 满足 $deg(w_0)=1$ 和 $deg(w_r) \geq 3$, 则称 P_r 为 G 的一条悬挂路^[2]。

分子图是顶点最大度不大于 4 的图, 它可用于描述化合物的分子结构, 在数学与化学中发挥着重要作用^[3-5]。图不变量是从图到正实数的数值函数, 代表了一种重要的分子描述符^[6], 它可以通过一些新的软件计算, 比如 Python^[7]。

图 G 的反对称分割指数 ($ISDD$ 指数) 是基于顶点度的一种图不变量, 是 Ghorbani 等提出的一个新分子拓扑指数^[8], 其定义为

$$ISDD(G) = \sum_{xy \in E(G)} \frac{deg(x) \cdot deg(y)}{deg(x)^2 + deg(y)^2} \quad (1)$$

基于顶点度的拓扑指数是一类非常重要的拓扑指数, 其中, Zagreb 指数、Randić 指数、Forgotten 指数、GA 指数、AG 指数、Harmonic 指数、Inverse sum indeg 指数、对称分割指数^[7]等已经在研究化学相关问题的 QSPR/QSAR 中得到了广泛应用^[6, 9-16]。

$ISDD$ 指数可用于检测可能具有优良性质的化合物, 它的数学性质值得被进一步研究。 $ISDD$ 指数被证明是一种适用和可行的分子描述符。

Akbar Ali 等研究了单圈图的 $ISDD$ 指数, 在具有固定顺序的所有连通单圈图集合中找出具有最大和最小 $ISDD$ 指数的图^[17]。程宇等^[18]研究了 $ISDD$ 指数和其他指数的关系, 并证明了在一定条件下, $ISDD$ 指数和对称分割指数是线性相关的。这些研究为深入研究 $ISDD$ 指数的其他性质奠定了坚实的基础。

本文利用不等式计算出具有固定悬挂点个数的分子树的 $ISDD$ 指数的最大及最小值, 并进一步刻画了达到 $ISDD$ 指数极值的分子树。

1 具有固定悬挂点个数的分子树的 $ISDD$ 指数

设 MT 是有 p 个悬挂点的 n 阶分子树。显然, $p = n_1$, 那么

$$\begin{aligned} p + n_2 + n_3 + n_4 &= n, \\ p + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 2m = 2(n-1), \\ m_{1,2} + m_{1,3} + m_{1,4} &= p, \\ m_{1,2} + 2m_{2,2} + m_{2,3} + m_{2,4} &= 2n_2, \\ m_{1,3} + m_{2,3} + 2m_{3,3} + m_{3,4} &= 3n_3, \\ m_{1,4} + m_{2,4} + m_{3,4} + 2m_{4,4} &= 4n_4. \end{aligned} \quad (2)$$

由式(1)可得

$$\begin{aligned} ISDD(MT) &= \frac{2}{5}m_{1,2} + \frac{3}{10}m_{1,3} + \frac{4}{17}m_{1,4} + \\ &\frac{1}{2}m_{2,2} + \frac{6}{13}m_{2,3} + \frac{2}{5}m_{2,4} + \frac{1}{2}m_{3,3} + \\ &\frac{12}{25}m_{3,4} + \frac{1}{2}m_{4,4}. \end{aligned} \quad (3)$$

由分子树 MT 中所有度等于或大于 3 的顶点诱导而成的子图, 称为 MT 的分支子图, 也就是说, 它是从 MT 中去掉度小于 3 的顶点和与它们相关联的边而产生的子图。用 $MT_{n,p}^{(1)}$ (p 是偶数), $MT_{n,p}^{(2)}$ 来表示两类有 p 个悬挂点的 n 阶分子树。

分子树 $MT_{n,p}^{(1)}$ 如图 1 所示, 其中, $n \geq 9$, p 是偶数, $6 \leq p \leq \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$ 。它们由 $\frac{p-2}{2}$ 个星图 S_5 组

成,星图 S_5 由路连接在一起,有些路的长度可能为0。显然, $m_{1,4}=p$, $m_{2,2}=n-2p+3$, $m_{2,4}=p-4$, $n_3=0$, $n_1=p$, $n_2=n-\frac{3}{2}p+1$, $n_4=\frac{1}{2}p-1$ 。

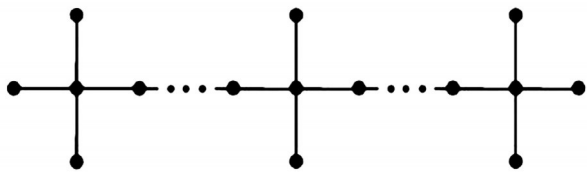


图1 $MT_{n,p}^{(1)}(n \geq 9, 6 \leq p \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor, p \text{ 是偶数})$

Fig. 1 $MT_{n,p}^{(1)}(n \geq 9, 6 \leq p \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor, p \text{ is even number})$

分子树 $MT_{n,p}^{(2)}$ 如图2所示,其中, $n \geq 7$, $3 \leq p \leq \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ 。它有 $p-2$ 个最大度为3的点,这些顶点可能与一个度为2的顶点相连,也可能与另一个度为3的顶点相连。显然, $m_{1,2}=p$, $m_{1,3}=0$, $m_{2,2}=n-3p+2$, $m_{2,3}=p$, $m_{3,3}=p-3$, $n_4=0$, $n_1=p$, $n_3=p-2$, $n_2=n-2p+2$ 。

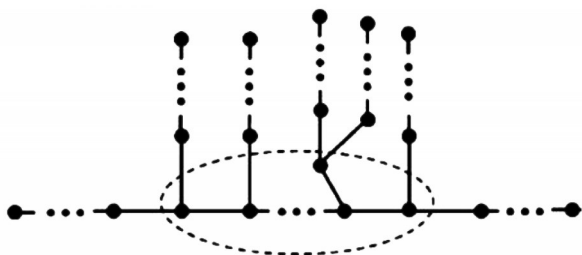


图2 $MT_{n,p}^{(2)}(n \geq 7, 3 \leq p \leq \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor)$

Fig. 2 $MT_{n,p}^{(2)}(n \geq 7, 3 \leq p \leq \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor)$

1.1 具有固定悬挂点个数的分子树的ISDD指数的最小值

设 $T_{n,p}$ 是有 p 个悬挂点的 n 阶树,通过将 $p-1$ 个悬挂点与有 $n-p+1$ 个顶点的一条路的一个端点连接而成。

引理1^[19] 设 T 是有 p 个悬挂点的 n 阶树,其中, $n \geq 5$, $2 \leq p \leq n-2$, 则

$$ISDD(G) \geq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}p + \frac{2}{5} + \frac{2p}{4+p^2} - \frac{p+1}{1+p^2},$$

等式成立,当且仅当 $T \cong T_{n,p}$ 。

根据引理1可知,当 $p \leq 4$ 时,在所有具有 p 个悬挂点的分子树中, $T_{n,p}$ 是ISDD指数取到最

小值的树,下面仅考虑 $p \geq 5$ 的情况。

定理1 设 MT 是有 p 个悬挂点的 n 阶分子树,其中, $p \geq 5$, 则

$$ISDD(MT) \geq \frac{1}{2}n - \frac{31}{85}p - \frac{1}{10},$$

等式成立,当且仅当 $MT \in MT_{n,p}^{(1)}$ ($6 \leq p \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor$, p 是偶数)。

证明 对于任意一个有 p ($p \geq 5$)个悬挂点的 n 阶分子树,根据式(2),Xing等^[20]推导出

$$\begin{cases} m_{1,4} = p - m_{1,2} - m_{1,3}, \\ m_{2,2} = n - 2p - m_{1,2} - \frac{1}{3}m_{1,3} - \frac{1}{3}m_{2,3} + \\ \frac{1}{3}m_{3,3} + \frac{2}{3}m_{3,4} + m_{4,4} + 3, \\ m_{2,4} = p + m_{1,2} + \frac{1}{3}m_{1,3} - \frac{2}{3}m_{2,3} - \\ \frac{4}{3}m_{3,3} - \frac{5}{3}m_{3,4} - 2m_{4,4} - 4. \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3),有

$$ISDD(MT) = \frac{1}{2}n - \frac{31}{85}p - \frac{1}{10} + \left(\frac{11}{170}m_{1,2} + \frac{8}{255}m_{1,3} + \frac{11}{390}m_{2,3} + \frac{2}{15}m_{3,3} + \frac{11}{75}m_{3,4} + \frac{1}{5}m_{4,4} \right), \quad (5)$$

因为 $m_{1,2}, m_{1,3}, m_{2,3}, m_{3,3}, m_{3,4}, m_{4,4}$ 是非负整数,故 $ISDD(MT) \geq \frac{1}{2}n - \frac{31}{85}p - \frac{1}{10}$ 。

$$ISDD(MT) = \frac{1}{2}n - \frac{31}{85}p - \frac{1}{10}, \text{ 当且仅当}$$

$m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,3} = m_{3,3} = m_{3,4} = m_{4,4} = 0$, 此时 $m_{1,4} = p$, $m_{2,2} = n - 2p + 3$, $m_{2,4} = p - 4$ 。

由式(2)可得

$$n_3 = 0, n_1 = p, n_2 = n - \frac{3}{2}p + 1, n_4 = \frac{1}{2}p - 1.$$

故 $MT \in MT_{n,p}^{(1)}$, 其中, p 为偶数。得证。

1.2 具有固定悬挂点个数的分子树的ISDD指数的最大值

对于任何具有 $p=2$ 个悬挂点的 n 阶分子树 MT ,是一个 n 阶路。下面仅考虑 $p \geq 3$ 。

引理2 设 MT 是一个有 p 个悬挂点的 n 阶分子树,其中, $p \geq 3$ 。如果 $ISDD(MT)$ 取最大,则 MT 的分支子图一定是树。

证明 对于 $p=3$,在 MT 中存在唯一度为3

的顶点, 并且容易看出 MT 的分支子图是一个树。

对于 $p \geq 4$, 选择 MT , 使 MT 具有最大的 ISDD 值。假设 MT 的分支子图不是树, 则 MT 必包含两个顶点, 分别是度为 3 或 4 的 x, y 点, 把它们连接到一条路 $xu_1u_2 \cdots u_s y$, 长度为 $s+1 \geq 2$, 其中, $deg(u_1) = deg(u_2) = \cdots = deg(u_s) = 2$ 。

设 $deg(z) = 1$, z 在 MT 中的邻点为 v , $deg(v) \geq 2$, 又因为 MT 是顶点度不超过 4 的分子树, 所以 $2 \leq d(v) \leq 4$, $deg(x) = 3$ 或 4 , $deg(y) = 3$ 或 4 。设 $IS(\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, 其中, $\alpha, \beta \geq 1$ 。

设 $f(x, y) = IS(x, y) - IS(x, 2)$, 其中, $x = deg(x), y = deg(y)$, 则当 $deg(x) = 3, deg(y) = 3$ 时,

$$f(3, 3) = IS(3, 3) - IS(3, 2) = \frac{3 \times 3}{3^2 + 3^2} - \frac{3 \times 2}{3^2 + 3^2} = \frac{1}{2} - \frac{6}{13} = \frac{1}{26} \quad (6)$$

当 $deg(x) = 4, deg(y) = 3$ 时,

$$f(4, 3) = IS(4, 3) - IS(4, 2) = \frac{4 \times 3}{4^2 + 3^2} - \frac{4 \times 2}{4^2 + 3^2} = \frac{12}{25} - \frac{2}{25} = \frac{2}{25} \quad (7)$$

故 $f(3, 3) < f(4, 3)$ 。

当 $deg(x) = 3, deg(y) = 4$ 时,

$$f(3, 4) = IS(3, 4) - IS(3, 2) = \frac{3 \times 4}{3^2 + 4^2} - \frac{3 \times 2}{3^2 + 2^2} = \frac{12}{25} - \frac{6}{13} = \frac{6}{325} \quad (8)$$

当 $deg(x) = 4, deg(y) = 4$ 时,

$$f(4, 4) = IS(4, 4) - IS(4, 2) = \frac{1}{2} - \frac{4 \times 2}{4^2 + 2^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

故 $f(3, 4) < f(4, 4)$ 。

所以

$$IS(deg(x), deg(y)) - IS(deg(x), 2) \geq IS(3, deg(y)) - IS(3, 2) \quad (9)$$

$$IS(3, deg(y)) - IS(2, deg(y)) \geq IS(3, 3) - IS(2, 3) \quad (10)$$

设 $g(x) = IS(x, 2) - IS(x, 1)$, 其中, $x = deg(v)$, $2 \leq deg(v) \leq 4$, 则当 $deg(v) = 2$ 时, $g(2) = \frac{1}{10}$,

当 $deg(v) = 3$ 时, $g(3) = \frac{21}{130}$, 当 $deg(v) = 4$ 时,

$g(4) = \frac{14}{85}$, 所以

$$IS(deg(v), 2) - IS(deg(v), 1) \geq$$

$$IS(2, 2) - IS(2, 1) \quad (11)$$

设 $MT' = MT - xu_1 - u_s y + xy + zu_1$, 由式(1)和引理 1 得

$$\begin{aligned} ISDD(MT') = & ISDD(MT) + IS(deg(x), deg(y)) + \\ & IS(deg(v), 2) + IS(2, 1) - IS(deg(v), 1) - \\ & IS(deg(x), 2) - IS(deg(y), 2) = \\ & ISDD(MT) + \\ & [IS(deg(x), deg(y)) - IS(deg(x), 2)] + \\ & IS(2, 1) + [IS(deg(v), 2) - IS(deg(v), 1)] - \\ & IS(deg(y), 2) \geq ISDD(MT) + \\ & [IS(3, deg(y)) - IS(3, 2)] + IS(2, 1) + \\ & [IS(2, 2) - IS(2, 1)] - IS(2, deg(y)) = \\ & ISDD(MT) + IS(2, 2) - IS(3, 2) + \\ & [IS(3, deg(y)) - IS(2, deg(y))] \geq \\ & ISDD(MT) + IS(2, 2) - IS(3, 2) + \\ & [IS(3, 3) - IS(2, 3)] = ISDD(MT) + \\ & \frac{1}{13} > ISDD(MT), \quad (12) \end{aligned}$$

这与 MT 的选择是矛盾的, 故引理成立。

定理 2 假设 MT 是一个 n 阶分子树, 有 p 个悬挂点, 其中, $p \geq 3$, 则

$$ISDD(MT) \leq \frac{1}{2}n - \frac{9}{65}p - \frac{1}{2} \quad (13)$$

等式成立, 当且仅当 $MT \in MT_{n,p}^{(2)}$ 。

证明 对于任何有 p 个悬挂点的 n 阶分子树, 根据式(2), Hansen 等^[21]推导出

$$\begin{cases} m_{1,2} = p - m_{1,3} - m_{1,4}, \\ m_{2,2} = n - \frac{5}{2}p + \frac{1}{2}m_{1,3} + \frac{3}{4}m_{1,4} - \frac{1}{2}m_{2,3} - \\ \quad \frac{1}{4}m_{2,4} + \frac{1}{4}m_{3,4} + \frac{1}{2}m_{4,4} + 2, \\ m_{3,3} = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}m_{1,3} - \frac{3}{4}m_{1,4} - \frac{1}{2}m_{2,3} - \\ \quad \frac{3}{4}m_{2,4} - \frac{5}{4}m_{3,4} - \frac{3}{2}m_{4,4} - 3. \end{cases} \quad (14)$$

将式(14)代入式(3), 得

$$\begin{aligned} ISDD(MT) = & \frac{1}{2}n - \frac{1}{10}p - \frac{1}{2} - \\ & \left(\frac{1}{10}m_{1,3} + \frac{1}{26}m_{2,3} + \frac{14}{85}m_{1,4} + \frac{1}{10}m_{2,4} + \frac{1}{50}m_{3,4} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

选择 MT , 使得 MT 取到 ISDD 指数的最大

值。由引理2得

$$m_{3,3} + m_{3,4} + m_{4,4} = n_3 + n_4 - 1. \quad (16)$$

由式(2)中的 $m_{1,3} + m_{2,3} + 2m_{3,3} + m_{3,4} = 3n_3$

和 $m_{1,4} + m_{2,4} + m_{3,4} + 2m_{4,4} = 4n_4$, 得

$$m_{1,3} + m_{2,3} + m_{1,4} + m_{2,4} = 3n_3 + 4n_4 - 2(m_{3,3} + m_{3,4} + m_{4,4}). \quad (17)$$

由式(16)和式(17)得

$$m_{1,3} + m_{2,3} + m_{1,4} + m_{2,4} = n_3 + 2n_4 + 2. \quad (18)$$

又由式(2)中的 $p + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 2(n -$

$1)$ 与 $p + n_2 + n_3 + n_4 = n$ 得

$$2n_4 + n_3 = p - 2. \quad (19)$$

将式(19)代入式(18), 得 $m_{1,3} + m_{2,3} + m_{1,4} + m_{2,4} = p$, 即 $m_{2,3} = p - m_{1,3} - m_{1,4} - m_{2,4}$ 代入式(15), 得

$$ISDD(MT) = \frac{1}{2}n - \frac{9}{65}p - \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{65}m_{1,3} + \frac{279}{2210}m_{1,4} + \frac{4}{65}m_{2,4} + \frac{1}{50}m_{3,4} \right), \quad (20)$$

故 $ISDD(MT) \leq \frac{1}{2}n - \frac{9}{65}p - \frac{1}{2}$

显然, $ISDD(MT) = \frac{1}{2}n - \frac{9}{65}p - \frac{1}{2}$, 当且仅当 $m_{1,3} = m_{1,4} = m_{2,4} = m_{3,4} = 0$, 此时 $m_{1,2} = p$, $m_{2,3} = p$, $m_{2,2} = n - 3p + 2$, $m_{3,3} = p - 3$, 由式(2)得, $n_2 = n - 2p + 2$, $n_3 = p - 2$, $n_4 = 0$. 故 $MT \in MT_{n,p}^{(2)}$ 得证。

2 结论

本文利用分类讨论法, 给出了给定悬挂点个数的分子树的 $ISDD$ 指数的最大值及最小值, 并识别出相应的极值树, 可以看出 $ISDD$ 指数在某种程度上是一种(局部的)不规则度量。因此, 通过在顶点上添加尽可能多的悬挂点来增加具有给定参数的树的不规则性, 也可以探索具有其他给定参数的极树。

参考文献:

- [1] DU J W, SUN X L. Extremal symmetric division deg index of molecular trees and molecular graphs with fixed number of pendant vertices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2022, 434: 127438.
- [2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Elsevier, 1976.
- [3] ALI A, ELUMALAI S, MANSOUR T. On the

symmetric division deg index of molecular graphs [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2020, 83: 205-220.

- [4] XU K, DAS K C. Some extremal graphs with respect to inverse degree [J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 203: 171-183.
- [5] FURTULA B, DAS K C, GUTMAN I. Comparative analysis of symmetric division deg index as potentially useful molecular descriptor [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2018, 118(17): e25659.
- [6] GUTMAN I, FURTULA B. Novel molecular structure descriptors-theory and applications II [M]. Serbia: University of Kragujevac, 2010.
- [7] VASILYEV A, VUKIČEVIĆ D. MathChem: a python package for calculating topological indices [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2014, 71: 657-680.
- [8] GHORBANI M, ZANGI S, AMRAEI N. New results on symmetric division deg index [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2021, 65: 161-176.
- [9] DAS K C, MATEJIC M, MILOVANOVIC E. Bounds for symmetric division deg index of graphs [J]. Filomat, 2019, 33(3): 683-698.
- [10] JIANG Y, CHEN X, LIN W. A note on chemical trees with maximal inverse sum indeg index [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2021, 86: 29-38.
- [11] SUN X L, GAO Y B, DU J W. On symmetric division deg index of unicyclic graphs and bicyclic graphs with given matching number [J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(8): 9020-9035.
- [12] NOUREEN S, ALI A, BHATTI A A. On the extremal Zagreb indices of n-vertex chemical trees with fixed number of segments or branching vertices [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry, 2020, 84: 513-534.
- [13] HASNI R, AHMAD JAMRI A A S, ARIF N E, et al. The randic index of trees with given total domination number [J]. Iranian Journal of Mathematical Chemistry, 2021, 12(4): 225-237.
- [14] HU X, ZHANG L. The harmonic index for trees with given domination number [J]. Discrete Mathematics Letters, 2022, 9: 31-37.
- [15] JAVAID M, JAVED S, MEMON S Q. Forgotten index of generalized operations on graphs [J]. Journal of Chemistry, 2021, 2021: 1-14.
- [16] 胡文静, 高玉斌. 删边操作下图的 Harmonic 能量 [J]. 中北大学学报(自然科学版), 2023, 44(2): 104-108.

- HU Wenjing, GAO Yubin. The harmonic energy after edge deletion[J]. *Journal of North University of China (Natural Science Edition)*, 2023, 44(2): 104-108. (in Chinese)
- [17] ALBALAHI A M, ALI A. On the inverse symmetric division deg index of unicyclic graphs[J]. *Computation*, 2022, 10(10): 181-187.
- [18] 程宇, 邵燕灵. 图的 ISDD 指数的界[J]. *中北大学学报(自然科学版)*, 2022, 43(5): 385-389.
CHENG Yu, SHAO Yanling. Bounds of ISDD indices of graphs[J]. *Journal of North University of China (Natural Science Edition)*, 2022, 43(5): 385-389. (in Chinese)
- [19] DU J W, SUN X L. On symmetric division deg index of trees with given parameters[J]. *AIMS Mathematics*, 2021, 6(6): 6528-6541.
- [20] XING R, ZHOU B, TRINAJSTIC N. Sum-connectivity index of molecular trees[J]. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2010, 48: 583-591.
- [21] HANSEN P, MÉLOT H. Variable neighborhood search for extremal graphs. 6. Analyzing bounds for the connectivity index[J]. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 2003, 43(1): 1-14.

声 明

本刊已许可中国知网、万方、维普、超星等数据库以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文。本刊支付的稿酬已包含上述数据库著作权使用费,所有署名作者向本刊提交文章发表之行为视为同意上述声明。如有异议,请在投稿时说明,本刊将按作者说明处理。
